FACULTAD DE INGENIERIA

Curso de Algebra Superior y Análisis

Primeras Lecciones de Análisis Matemático

(Apuntes de clase)

Profesor: E. GARCIA DE ZUÑIGA



Principales obras consultadas:

N. Nielsen, *Elemente der Funktionentheorie;* **F. Klein**, *Fragen der Elementargeometrie;* **J. Pierpont**, *Theory of Functions of Real Variables;* **G. Verriest**, *L' Infini mathématique.*

Taller Tipográfico de la Armada

Montevideo
1932

FACULTAD DE INGENIERIA

Curso de Algebra Superior y Análisis

Primeras Lecciones de Análisis Matemático

(Apuntes de clase)

Profesor : E. GARCIA DE ZUÑIGA



Principales obras consultadas :

N. Nielsen, *Elemente der Funktionentheorie ;* **F. Klein,** *Fragen der Elementargeometrie;* **J. Pierpont,** *Theory of Functions of Real Variables ;* **G. Verriest,** *L' Infini mathématique.*

TALLER TIPOGRÁFICO DE LA ARMADA

Montevideo

1932

LECCIONES DE ALGEBRA SUPERIOR Y ANALISIS

PRIMERA LECCION

Números irracionales y sucesiones

Número natural es el número entero y positivo. La adición y multiplicación de números naturales dan siempre números naturales.

La necesidad de hacer siempre posibles las operaciones de sustracción y división ha conducido a ampliar el campo de los números con la introducción de los números negativos y fraccionarios.

Los números enteros y fraccionarios, positivos y negativos, se designan con la denominación común de *números racionales*.

En el campo de los números racionales la extracción de raíces no es siempre posible, así por ejemplo $\sqrt{2}$ no existe en el campo racional.

Es necesario pues introducir otra clase de números que se llaman *irracionales*.

El conjunto de los números racionales e irracionales constituye el campo de los *números reales*, únicos números de que nos ocuparemos en estas primeras lecciones.

Se llama *sucesión* un conjunto infinito de números, que se conciben colocados los unos después de los otros con sus índices de colocación. Para que la sucesión esté definida es necesario que a un índice dado corresponda un elemento bien determinado de la sucesión.

Una de las sucesiones más interesantes es la de los números racionales positivos. Se la puede formar del modo siguiente: se considera un primer grupo constituído por las fracciones tales que el numerador y el denominador de cada una, sumados, den la unidad; la única fracción en estas condiciones es $\frac{0}{1}$, pues $\frac{1}{0}$ no tiene sentido.

El segundo grupo estaría formado por las fracciones cuyo numerador y denominador sumados den 2. Este grupo contendrá también una sola fracción nueva . . . . . . $\frac{1}{1}$; el tercer grupo, en que la suma de los términos de las fracciones deberá ser igual a 3, contiene $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{1}$; el cuarto grupo constaría de $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{1}$; etc.

De cada grupo eliminamos las fracciones que ya forman parte de alguno de los grupos precedentes. Los números racionales así obtenidos se pueden ordenar después, dentro de cada grupo, según el orden creciente. Es evidente que en esa forma se obtiene la sucesión de todos los números racionales positivos.

Podría procederse de otros modos, por ejemplo: escribiendo primero todas las fracciones propias cuyo denominador es igual a 2, etc. y ordenando por orden creciente las fracciones en cada grupo. Si después de cada una de las fracciones así obtenidas escribimos la fracción inversa, obtendremos también la sucesión de todos los números racionales positivos.

Se dice que una sucesión (a_n) es *fundamental* cuando, dado ε positivo y arbitrariamente pequeño, se puede determinar un entero positivo N, tal que para $n \geqq N$ y p entero positivo cualquiera:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

Supondremos que los elementos a_0, a_1,.. son números racionales. Si existe un número racional A tal que:

$$(1) \qquad |A - a_n| < \varepsilon \qquad (n \geqq N),$$

se dice que A es el límite de la sucesión, y se escribe:

$$\lim_{n = \infty} a_n = A$$

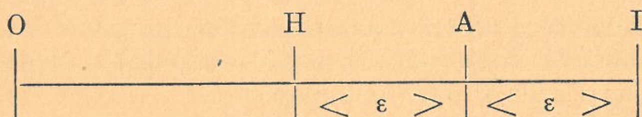
De la (1) deducimos

$$A - a_n < \varepsilon, \qquad a_n - A < \varepsilon,$$

es decir:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon.$$

Estas dos desigualdades pueden interpretarse gráficamente como se indica a continuación



es decir en forma que demuestra que los extremos de los segmentos representativos de todos los infinitos elementos que siguen al a_n se hallarán en el entorno de A,

$$\text{de } (A - \varepsilon) \text{ a } (A + \varepsilon).$$

Una sucesión fundamental puede no tener límite racional; es lo que pasa, por ejemplo, con la sucesión de los valores, aproximados por defecto y expresados en fracción decimal, de $\sqrt{2}$:

1, 1. 4, 1. 4 1, 1. 4 1 4, ...

Pero siendo la sucesión fundamental, de :

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

se deduce siempre :

$$a_n - \varepsilon \leq a_{n+p} < a_n + \varepsilon.$$

Interpretaremos este resultado diciendo que todos los infinitos elementos que siguen a a_n estarán comprendidos en el entorno $(a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ de a_n (interpretación gráfica análoga a la anterior).

Podemos pues considerar las sucesiones como símbolos representativos de los números irracionales. Esto se justifica desde dos puntos de vista : *teórico* y *práctico*.

Teórico—porque no está en contradición con los principios de la aritmética de los números racionales, sino que al contrario la completa permitiendo, simbolizar metódicamente los números que no figuran en el campo racional.

Práctico—porque nos suministra el medio de hacer corresponder símbolos numéricos a ciertas magnitudes geométricas irrepresentables por números racionales (por ejemplo, la diagonal del cuadrado cuyo lado es igual a la unidad).

Teorema: *Dada una sucesión fundamental, se puede indicar un número positivo mayor que el valor absoluto de un elemento cualquiera de la sucesión.*

Siendo fundamental la sucesión, si tomamos para ε el valor 1, podremos afirmar que para $n \geqq N$ y para p entero y positivo cualquiera,

$$|a_{n+p} - a_n| < 1,$$

de donde

$$a_{n+p} - a_n < 1 \text{ y } a_n - a_{n+p} < 1,$$

es decir:

$$a_{n+p} < a_n + 1 \text{ y } - a_{n+p} < - a_n + 1.$$

Como necesariamente el primer miembro de una de estas dos últimas desigualdades debe ser positivo, tendremos:

$$|a_{n+p}| < |a_n| + 1, \text{ o, } |a_{N+p}| < |a_N| + 1.$$

Tomando un número G mayor que todos los del grupo $|a_0|, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|, |a_N| + 1$, el número G será mayor que los valores absolutos de todos los elementos de la sucesión dada, desde $|a_0|$ hasta $|a_N|$, y, en virtud de la desigualdad

$$|a_{N+p}| < |a_N| + 1,$$

será también mayor que los valores absolutos de todos los infinitos elementos que siguen a a_{n+1}.

Teorema: Si una sucesión fundamental tiene infinitos elementos positivos e infinitos negativos, tendrá un límite igual a cero.

Para $n \geqq N$ se tendrá $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Elijamos p de modo que a_{n+p} sea de signo contrario al de a_n (cosa posible desde que, por hipótesis, tanto los elementos positivos como los negativos están en número infinito)

Se tendrá:

$$|a_{n+p}| + |a_n| \angle \varepsilon,$$

y con mayor razón:

$$|a_n| \angle \varepsilon,$$

lo que se puede escribir

$$| 0 - a_n | < \varepsilon.$$

Según la definición de límite, se tiene, pues que 0 es el límite de la sucesión dada.

SEGUNDA LECCION

Operaciones con las sucesiones fundamentales

Empecemos por definir los conceptos de igualdad y desigualdad. Si tenemos dos números cualesquiera ω y ω', respectivamente representados por las sucesiones:

$$\omega \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$$

$$\omega' \qquad a'_0, a'_1, a'_2, \ldots\ldots, a'_n, \ldots\ldots,$$

pueden presentarse tres casos:

Primer caso: Se dice que ω es mayor que ω' si, a partir de un cierto valor N, se tiene para todo n $\geqq$ N:

$$a_n - a'_n > g > 0.$$

Segundo caso: Se dice que ω' es mayor que ω si, a partir de un cierto N, es decir para n $\geqq$ N, se tiene constantemente:

$$a'_n - a_n > g > 0.$$

Tercer caso: Se dice que ω es igual a ω' si no ocurre ninguno de los dos casos anteriores.

Demostremos que estas definiciones son exactas si ω y ω' son

números racionales, y que por consiguiente ellas no contradicen sino que generalizan la aritmética de estos números.

1.er Caso :

$$\omega \qquad a_0, a_1, a_2 \ldots\ldots, a'_n, \ldots$$

$$\omega' \qquad a'_0, a'_1, a'_2, \ldots\ldots, a'_n, \ldots$$

$$a_n - a'_n > g > o.$$

Siendo ω un número racional, límite de la primera sucesión, tendremos:

$$a_n - \varepsilon < \omega < a_n + \varepsilon$$

Análogamente:

$$a'_n - \varepsilon < \omega' < a'_n + \varepsilon$$

De estas desigualdades se deducen las dos siguientes:

$$\omega > a_n - \varepsilon, \qquad - \omega' > - a'_n - \varepsilon,$$

que sumadas miembro a miembro dan:

$$\omega - \omega' > a_n - a'_n - 2\,\varepsilon.$$

Haciendo $\varepsilon < \frac{g}{3}$, resulta $\omega - \omega' > \frac{g}{3}$,

lo que significa que $\omega > \omega'$.

Segundo caso: Se demuestra como el anterior.

Tercer caso: El criterio correspondiente a este caso puede transformarse diciendo que, por definición,

$$\omega = \omega'$$

si, a partir de cierto n, se tiene siempre :

$$|a_n - a'_n| < \varepsilon,$$

por pequeño que sea el número positivo ε. En efecto :

$$a_n - a'_n \equiv a_n - a_{n+p} + a_{n+p} - a'_{n+p} + a'_{n+p} - a'_n$$

Tomemos n $\geqq$ N, siendo este último tal que para n $\geqq$ N el primero y el último binomio del segundo miembro de la identidad anterior sean menores que $\frac{\varepsilon}{3}$, y elijamos p de manera que

$$a_{n+p} - a'_{n+p} < \frac{\varepsilon}{3};$$

entonces $a_n - a'_n < \varepsilon$.

Analogamente probariamos que $a'_n - a_n < \varepsilon$;

luego $|a_n - a'_n| < \varepsilon$. La recíproca es evidente ; los dos criterios se equivalen por lo tanto.

Si ω y ω' son racionales y se tiene para n $\leqq$ N,

$$|a_n - a'_n| < \frac{\varepsilon}{3},$$

resultará de esta desigualdad y de las dos desigualdades dobles que siguen :

$$a_n - \frac{\varepsilon}{3} < \omega < a_n + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \text{y}$$

$$a'_n - \frac{\varepsilon}{3} < \omega' < a'_n + \frac{\varepsilon}{3}:$$

$$|\omega - \omega'| < |a_n - a'_n| + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

Como el valor de $|\omega - \omega'|$ es una cantidad constante determinada, mientras que ε es tan pequeña como se quiera, la desigualdad precedente solo es posible si $\omega = \omega'$.

Las recíprocas de estas proposiciones son verdaderas debido al principio de Hauber. Es decir que si ω y ω' son números racionales representados por las sucesiones (a_n) y (a'_n), la desigualdad $\omega \gtrless \omega'$ tendrá por consecuencia que puede determinarse un número N tal que para $n \leqq N$,

$$a_n - a'_n > g > o, \text{ etc.}$$

De las definiciones dadas, resulta que pueden extenderse a los números irracionales los principios fundamentales de las relaciones de igualdad y desigualdad válidas para los números racionales, a saber :

Si $\omega = \omega'$ y $\omega' = \omega''$, tenemos $\omega = \omega''$;
» $\omega > \omega'$ » $\omega' > \omega''$, » $\omega > \omega''$;
» $\omega < \omega'$ » $\omega' < \omega''$, » $\omega < \omega''$.

Adición de números irracionales

La suma de los números irracionales ω y ω' definidos respectivamente por las sucesiones (a_n) y (a'_n) será, por definición, el número definido por la sucesión $(a_n + a'_n)$.

Empecemos por demostrar que la sucesión $(a_n + a'_n)$ es fundamental. Ello resulta inmediatamente de la identidad :

$$(a_{n+p} + a'_{n+p}) - (a_n + a'_n) \equiv (a'_{n+p} - a_n) + (a'_{n+p} - a'_n)$$

que puede transformarse en la desigualdad

$$|(a_{n+p} + a'_{n+p}) - (a_n + a'_n)| \equiv |a_{n+p} - a_n| + |a'_{n+p} - a'_n| < \varepsilon.$$

Demostremos después que la definición puede aplicarse a los números racionales, es decir que si ω y ω' son números tales, la regla dada conduce al mismo resultado obtenido en la aritmética de los números racionales. En efecto, si ω y ω' son racionales, tenemos :

$$a_n - \frac{\varepsilon}{2} < \omega < a_n + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y}$$

$$a'_n - \frac{\varepsilon}{2} < \omega' < a'_n + \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, sumando miembro a miembro, tenemos:

$$a_n + a'_n - \varepsilon < \omega + \omega' < a_n + a'_n + \varepsilon,$$

es decir que

$$|(\omega + \omega') - (a_n + a'_n)| < \varepsilon.$$

Luego pues, $\omega + \omega'$ es el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n + a'_n$.

Es necesario también demostrar que la operación es uniforme, o dicho en otros términos, que si ω y ω' están definidos por otras sucesiones, (b_n) y (b'_n) respectivamente, el resultado no cambia. Y en efecto, si ω está representado por las sucesiones (a_n) y (b_n), eso quiere decir que, a partir de cierto n, $|a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ y analogamente $|a'_n - b'_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

De las desigualdades procedentes es fácil sacar la siguiente:

$|(b_n + b'_n) - (a_n + a'_n)| < \varepsilon$, de donde fluye la igualdad de las dos cantidades representadas por:

$$(a_n + a'_n) \text{ y } (b_n + b'_n).$$

Sustracción de números irracionales

Defineremos la resta $\omega - \omega'$, diciendo que es el número representado por la sucesión cuyo término general es $a_n - a'_n$, siendo a_n el término general de la sucesión que representa a ω y a'_n el término general de la sucesión que representa a ω'.

Se demuestra, como para la adición, que la sucesión $(a_n - a'_n)$ es fundamental, que la operación es uniforme y que la regla dada se puede aplicar sin contradicción a los números racionales.

Multiplicación de números irracionales

Dadas las sucesiones:

$$\begin{array}{ll} \omega & a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots \\ \omega' & a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots\ldots, \end{array}$$

se define como producto de ω por ω' el número representado por la sucesión cuyo término general es

$$a_n \cdot a'_n.$$

La sucesión así definida es fundamental, o dicho de otro modo, para $n \geqq N$:

$$| a_{n+p}\, a'_{n+p} - a_n a'_n | < \varepsilon.$$

Esto resulta de la identidad

$$a_{n+p}\, a'_{n+p} - a_n\, a'_n \equiv a_{n+p}\, (a'_{n+p} - a'_n) + a'_n\, (a_{n+p} - a_n),$$

que dá, tomando valores absolutos:

$$|a_{n+p}\, a'_{n+p} - a_n\, a'_n| \leq |a_{n+p}| \cdot |a'_{n+p} - a'_n| + |a'_n| \cdot |a_{n+p} - a_n|$$

Pero, por ser fundamentales las sucesiones (a_n) y (a'_n), resulta posible encontrar un número positivo G mayor que el valor absoluto de cualquier elemento de las sucesiones (a_n) y (a'_n).

Teniendo además en cuenta que

$$|a'_{n+p} - a'_n| < \varepsilon \text{ y } |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon, \text{ para } n \geq N,$$

llegamos a la siguiente desigualdad:

$$|a_{n+p}\, a'_{n+p} - a_n\, a'_n| < 2\, G\, \varepsilon,$$

y como G es finito y ε tan pequeño como se quiera, resulta que la sucesión $(a_n \cdot a'_n)$ es fundamental.

Si ω y ω' son ambos racionales, del concepto de límite se deduce (representando d_n y d'_n cantidades tan pequeñas como se quiera en valor absoluto para n suficientemente grande):

$$\omega = a_n + d_n\,,\; \omega' = a'_n + d'_n.$$

De donde:

$$\omega\ \omega' = a_n\, a'_n + a'_n\, d_n + a_n\, d'_n + d_n\, d'_n;$$

y como a_n y a'_n son menores, en valor absoluto, que cierto número G, se deduce que la diferencia $\omega \cdot \omega' - a_n \cdot a'_n$ puede hacerse tan pequeña, en valor absoluto, como se quiera.

Luego:

$$|\omega\ \omega' - a_n\, a'_n| < \varepsilon,$$

de donde resulta que $\omega \cdot \omega'$ es el limite de la sucesión $(a_n\ a'_n)$.

La multiplicación, tal como acabamos de definirla, es una operación uniforme. Sean en efecto, las sucesiones siguientes:

$$(1) \qquad a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$$
$$(2) \qquad b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\ldots$$

de igual límite ω, y sean las sucesiones

$$(3) \qquad a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$
$$(4) \qquad b,_0, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n, \ldots$$

de límite ω.

Podremos escribir:

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \quad y \quad |a'_n - b'_n| < \varepsilon.$$

Para demostrar que la multiplicación es una operación uniforme, hay que probar que:

$$|a_n a'_n - b_n b'_n| < \varepsilon.$$

Y en efecto la identidad

$$a_n a'_n - b_n b'_n \equiv a_n(a'_n - b'_n) + b'_n(a_n - b_n)$$

que, tomando valores absolutos, da:

$$|a_n a'_n - b_n b'_n| \leqq |a_n| \cdot |a'_n - b'_n| + |b_n| \cdot |b'_n - b_n|,$$

demuestra que, siendo G un número positivo tal que

$$G > |a_n| \quad y \quad G > |b'_n|,$$

y tomando n suficientemente grande para que

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \quad y \quad |a'_n - b'_n| < \varepsilon:$$

$$| a_n \cdot a'_n - b_n \cdot b'_n | < 2 G \varepsilon;$$

de donde :

$$b_n \cdot b'_n = a_n \cdot a'_n$$

División de números irracionales

El cociente de dividir ω por ω' (supondremos $\omega' \neq o$, lo que significa que, a partir de cierto elemento a'_n de la sucesión que define a ω', se tiene: $| a'_{n+p} | > g > o$) se expresa por $\frac{\omega}{\omega'}$, y se define como el valor representado por la sucesión fundamental cuyo término general es $\frac{a_n}{a'_n}$.

Supondremos que, de acuerdo con la hipótesis relativa a ω', a partir de cierto término de la segunda sucesión todos los demás son superiores en valor absoluto a g.

Demostremos que la sucesión es fundamental :

Como las sucesiones que definen a ω y ω' son fundamentales, podremos escribir :

$$| a_{n+p} | \leqq G, \ | a'_{n+p} | \leqq G \qquad \text{y además}$$

$$| a'_{n+p} | > g, \ | a'_n | > g, \ | a_{n+p} - a_n | < \varepsilon, | a'_{n+p} - a'_n | < \varepsilon.$$

Queremos demostrar que :

$$\left| \frac{a_{n+p}}{a'_{n+p}} - \frac{a_n}{a'_n} \right| < \varepsilon' \ (n \geqq N).$$

Y en efecto, la identidad

$$\frac{a_{n+p}}{a'_{n+p}} - \frac{a_n}{a'_n} \equiv \frac{a_{n+p} \cdot a'_n - a_n \cdot a'_{n+p}}{a'_{n+p} \cdot a'_n}$$

$$= \frac{a_{n+p}\,(a'_n - a'_{n+p}) + a'_{n+p}\,(a_{n+p} - a_n)}{a'_n \cdot a'_{n+p}}$$

nos da, tomando valores absolutos :

$$\left| \frac{a_{n+p}}{a'_{n+p}} - \frac{a_n}{a'_n} \right| \leqq \frac{|a_{n+p}| \cdot |a'_n - a'_{n+p}| + |a'_{n+p}| \cdot |a_n - a_{n+p}|}{|a'_n| \cdot |a'_{n+p}|}$$

de donde :

$$\left| \frac{a_{n+p}}{a'_{n+p}} - \frac{a_n}{a'_n} \right| < \frac{2\,G\,\varepsilon}{g^2} < \varepsilon',$$

con solo tomar $\varepsilon < \dfrac{g^2\,\varepsilon'}{2\,G}$.

Para demostrar que esta definición es también aplicable a los números racionales, basta demostrar que, para ω y ω' racionales, se tiene que el valor límite de la sucesión de término general $\dfrac{a_n}{a'_n}$ es $\dfrac{\omega}{\omega'}$.

Hagamos $\omega = a_n + d_n$ y $\omega' = a'_n + d'_n$, designando por d_n y d'_n dos números tan pequeños en valor absoluto como se quiera. Entonces se tiene :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a_n + d_n}{a'_n + d'_n}\,; \quad \frac{\omega}{\omega'} - \frac{a_n}{a'_n} = \frac{a_n + d_n}{a'_n + d'_n} - \frac{a_n}{a'_n}$$

$$= \frac{a'_n \cdot d_n - a_n \cdot d'_n}{(a'_n)^2 + a'_n \cdot d'_n},$$

cantidad cuyo valor absoluto es tan pequeño como se quiera para n suficientemente grande.

La división es una operación uniforme. Si, en efecto, suponemos el número ω definido por la sucesión

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ o por $b_0, b_1, \ldots b_n, \ldots$

y ω' por

$a'_0, a'_1, \ldots, a_n \ldots$, o por $b'_0, b'_1, \ldots, b'_n \ldots$,

se tiene

$$|a_n - b_n| < \varepsilon \text{ y } |a'_n - b'_n| < \varepsilon,$$

como expresión de la igualdad de las dos primeras sucesiones y de las dos últimas.

Para demostrar que el cociente $\frac{\omega}{\omega'}$, es el mismo, ya sea como límite de $\frac{a_n}{a'_n}$, o de $\frac{b_n}{b'_n}$, nos valdremos de la identidad:

$$\frac{a_n}{a'_n} - \frac{b_n}{b'_n} = \frac{a_n \cdot b'_n - b_n \cdot a'_n}{a'_n \cdot b'_n} =$$

$$\frac{a_n (b'_n - a'_n) + a'_n (a_n - b_n).}{a'_n \cdot b'_n}$$

Tomando valores absolutos:

$$\left| \frac{a_n}{a'_n} - \frac{b_n}{b'_n} \right| \leqq \frac{|a_n| \cdot |b'_n - a'_n| + |a'_n| \cdot |a_n - b_n|}{|a'_n| \cdot |b'_n|}$$

Y, como es posible determinar dos números g y G tales que:

$$|a_n| < G, \ |a'_n| < G, \ |a'_n| > g, \ |b'_n| > g,$$

resulta, teniendo en cuenta las dos desigualdades

$$|a_n - b_n| < \varepsilon, \ |a'_n - b'_n| < \varepsilon, \ \left| \frac{a_n}{a'_n} - \frac{b_n}{b'_n} \right| < \frac{2 G \varepsilon}{g^2},$$

cantidad esta última que puede ser tan pequeña como se quiera.

Propiedades generales de las cuatro operaciones

Se dice que una operación $\frown$ es contraria a la operación $\smile$ cuando, dadas dos cantidades α y β, se tiene:

$$(\alpha \frown \beta) \smile \beta = \alpha.$$

Por ejemplo: se dice que la adición es contraria a la sustración si

$$(\omega + \omega') - \omega' = \omega.$$

Para demostrar que esto es cierto para los números irracionales, recordaremos que la sucesión de término general $(a_n + a'_n) - a'_n$, según las definiciones dadas, tiene por límite $(\omega + \omega') - \omega'$; pero $(a_n + a'_n) - a'_n = a_n$ ya que, siendo a_n y a'_n racionales (los términos de las sucesiones que estamos considerando lo son siempre), podemos efectuar las operaciones según las reglas de la aritmética de los números racionales. Y como el valor límite de la sucesión de término general a_n es ω, resulta cierta la igualdad $(\omega + \omega') - \omega' = \omega$, también para ω y ω' irracionales.

La multiplicación es contraria a la división, es decir que

$$\frac{\omega \cdot \omega'}{\omega'} = \omega.$$

En efecto, según las definiciones, el valor de $\frac{\omega \cdot \omega'}{\omega'}$ es el valor límite de la sucesión de término general $\frac{a_n \cdot a'_n}{a'_n}$, valor límite que es ω.

Principio conmutativo

Este principio, que es válido en la adición y en la multiplicación, se enuncia diciendo que:

El orden de los factores o sumandos no altera el producto o la suma.

Se demuestra analogamente, sin ninguna dificultad.

Principio asociativo

Este principio que se expresa en general por la igualdad

$$(\alpha \frown \beta) \frown \alpha = \alpha \frown (\beta \frown \alpha)$$

es válido para la suma y la multiplicación.

Y se demuestra también, para los números irracionales recurriendo a las sucesiones que los definen.

Principio distributivo

Se expresa en general por la fórmula

$$(\alpha \frown \beta) \smile \gamma = (\alpha \smile \gamma) \frown (\beta \smile \gamma)$$

y es válido para la multiplicación o división con respecto a la adición o sustracción, es decir:

$$(\omega \pm \omega') \, \omega'' = \omega \, \omega'' \pm \omega' \, \omega'' \qquad \text{y}$$

$$\frac{\omega \pm \omega'}{\omega''} = \frac{\omega}{\omega''} \pm \frac{\omega'}{\omega''}$$

(La demostración se basa siempre en el mismo procedimiento).

Hemos definido para los números irracionales las relaciones:

$$\omega < \omega', \quad \omega > \omega'.$$

Si snponemos $\omega' = o$, se dice que ω es negativo o positivo respectivamente.

De todo lo estudiado anteriormente se deduce que son aplicables a los números irracionales todas las reglas de las operaciones estudiadas en el campo de los números racionales, así como las reglas referentes a las transformaciones de las ecuaciones e inecuaciones.

LECCION III

Sucesiones generales

Llamaremos sucesión general a una sucesión de números cualesquiera racionales o irracionales:

$$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$$

en que suponemos conocido el valor de cualquiera de sus elementos con sólo conocer su correspondiente subíndice.

Estas sucesiones generales pueden ser de tres clases:

1.º—*Sucesiones convergentes o fundamentales.*

Son aquellas en que, dado ε positivo tan pequeño como se quiera, puede siempre calcularse un entero N, de modo que para todo $n \geqq N$ se tenga:

$$| \omega_{n+p} - \omega_n | < \varepsilon.$$

Lema: *Si se designa con* ω *el número irracional representado por una sucesión de elementos racionales* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, *se tendrá para* $n \geqq N$ *que* $| \omega - a_n | < \varepsilon$, *siendo* ε *un número positivo tan pequeño como se quiera.*

En efecto, si empezamos por demostrar que $\omega - a_n < \varepsilon$ y $a_n - \omega < \varepsilon$, de esta doble desigualdad resultará inmediatamente la fórmula del enunciado. Y en efecto, tomando n suficientemente grande para que:

$$| a_n - a_{n+p} | < \frac{\varepsilon}{2},$$

y suponiendo definido el número ε por la sucesión $\varepsilon, \varepsilon, \ldots \varepsilon \ldots$, tendremos como consecuencia de la última desigualdad :

$$\varepsilon - (a_{n+p} - a_n) > \frac{\varepsilon}{2} \text{ y } \varepsilon - (a_n - a_{n+p}) > \frac{\varepsilon}{2},$$

es decir (considerando n fijo y observando que entonces la sucesión de término general $a_{n+p} - a_n$ representa a $\omega - a_n$)

$$\varepsilon > \omega - a_n \text{ y } \varepsilon > a_n - \omega,$$

desigualdades equivalentes a las indicadas.

Teorema: Dada una sucesión convergente o fundamental

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots,$$

existe un número determinado ω *tal que, para todo* $n \geqq N$, *sea*

$$| \omega - \omega_n | < \varepsilon.$$

En efecto : formemos una sucesión de elementos racionales

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

que llamaremos sucesión auxiliar, tomando de las sucesiones que definen a

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots,$$

los elementos correspondientes de modo que, dado η tan pequeño como se quiera, pueda siempre hallarse un número n_1 tal que para $n \geqq n_1$ se tenga :

$$| \omega_n - \alpha_n | < \eta$$

es decir que se tomaría por ejemplo el elemento α_n de modo que

satisfaga la desigualdad $| \omega_n - \alpha_n | < \frac{1}{n}$ y ésta permanezca exacta para todos los elementos siguientes de la sucesión que define a ω_n.

La sucesión:

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n, \ldots\ldots$$

es fundamental, pues, dado ε_1 tan pequeño como se quiera, se tiene

$$| \alpha_{n+p} - \alpha_n | \leqq | \alpha_{n+p} - \omega_{n+p} | + | \omega_{n+p} - \omega_n |$$
$$+ | \omega_n - \alpha_n | < \varepsilon_1,$$

si hemos tomado n suficientemente grande para que cada uno de los tres términos del segundo miembro sea inferior a $\frac{\varepsilon_1}{3}$.

Sea ahora ω el límite de la sucesión auxiliar; para n suficientemente grande se tendrá, en virtud del lema:

$$| \omega - \alpha_n | < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Pero de la identidad

$$\omega - \omega_n \equiv \omega - \alpha_n + \alpha_n - \omega_n,$$

resulta:

$$| \omega - \omega_n | \leqq | \omega - \alpha_n | + | \alpha_n - \omega_n | < \varepsilon,$$

ya que hemos tomado

$$| \omega - \alpha_n | < \frac{2\varepsilon}{3}$$

y que podemos tomar $| \alpha_n - \omega_n |$ tan pequeño como se quiera y por consiguiente inferior a $\frac{\varepsilon}{3}$.

Este resultado se escribe ordinariamente así:

$$\omega = \lim_{n=\infty} \omega_n,$$

y se dice que:

$$\omega_0, \omega_1, \ldots\ldots, \omega_n, \ldots\ldots,$$

es una sucesión general convergente de límite ω.

Reciprocamente, si para $n \geqq N$

$$| \omega - \omega_n | < \varepsilon,$$

la sucesión

$$\omega_0, \omega_1, \ldots\ldots, \omega_n, \ldots$$

es fundamental, porque

$$| \omega_{n+p} - \omega_n | \leqq | \omega_{n+p} - \omega | + | \omega - \omega_n | < 2\varepsilon.$$

Es conveniente hacer notar que una sucesión fundamental de elementos irracionales puede muy bien tener un límite racional. Ejemplo:

$$1 + \frac{\omega}{1}, 1 + \frac{\omega}{2}, \ldots\ldots, 1 + \frac{\omega}{n}, \ldots\ldots.$$

2.° — *Sucesiones divergentes.*

Si designamos por E un número positivo arbitrariamente grande, y si es siempre posible determinar luego un entero positivo N tal que para todo $n \geqq N$ sea

$$| \omega_n | > E,$$

se dice que la sucesión general

$$\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$$

es divergente.

Si los elementos de la sucesión, a partir de uno de ellos, conservan siempre el mismo signo, se dice que la sucesión es *propiamente divergente*, y se escribe:

$$\lim \omega_n = +\infty \quad \text{o} \quad \lim \omega_n = -\infty$$

según que ω_n, a partir de cierto elemento, se conserve constantemente positivo o constantemente negativo.

Si la sucesión es divergente y tiene infinitos elementos positivos e infinitos negativos, se dice que es *impropiamente divergente*.

3.º — *Sucesiones oscilantes*.

Si la sucesión no es ni convergente ni divergente, se llama *oscilante*, pudiendo serlo entre límites finitos o entre límites infinitos, según se tenga para cualquier n:

$$|\omega_n| \leqq G$$

o no pueda encontrarse un número finito G que satisfaga para todo n a la anterior igualdad—desigualdad.

Procedimiento euclidiano

Como aplicación de la teoría de las sucesiones, definiremos el procedimiento de demostración euclidiano, así llamado porque aparece ya en los Elementos de Geometría de Euclides.

Si empleamos para mayor claridad de la exposición la representación geómetrica, el procedimiento euclidiano puede definirse como sigue:

Representemos dos números a y b $(a < b)$ por segmentos sobre un eje a partir de un origen; el segmento J_0 cuyo origen es el extremo del segmento a y cuyo extremo es el de b se llama también intervalo, y se designa con la anotación $[a, b]$.

Dividamos ahora por la mitad el intervalo J_0 y designemos con J_1 uno de los dos intervalos así obtenidos. La bisección de J_1 nos dará otros dos intervalos, de los cuales elegiremos uno que designaremos por J_2; etc. J_n es pues, en general, un intervalo elegido de cierto modo entre los dos que resultan de bisecar el intervalo J_{n-1}.

En cada uno de los intervalos $J_0, J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$ determinemos un punto, que puede ser uno de sus extremos, y representemos por a_n la abscisa del puntositua do en J_n. Podemos entonces enunciar la siguiente proposición:

La sucesión:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

es siempre fundamental, y su límite es el mismo cualesquiera que sean los puntos que elijamos en los intervalos sucesivos. Este valor límite, sólo dependiente de la elección de los intervalos $J_0, J_1, \ldots, J_n, \ldots$, se llama límite de dicha sucesión de intervalos.

En efecto: como el intervalo J_{n+p} está comprendido dentro de cada uno de los intervalos precedentes (del J_n en particular), y a lo sumo podrá tener uno de sus dos extremos común con el correspondiente de alguno o algunos de ellos, se tiene evidentemente para cualquiera de las sucesiones

$$a_0, a_1, a_2, a_n, \ldots$$

que se elija:

$$| a_{n+p} - a_n | \leqq \frac{b-a}{2^n}$$

y por lo tanto se puede afirmar que todas las sucesiones análogas a la

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

son fundamentales.

Sea después

$$a'_0, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n, \ldots$$

otra de estas sucesiones; se tendrá también:

$$| a_n - a'_n | \leqq \frac{b-a}{2^n}.$$

Luego las sucesiones (a_n) y (a'_n) tienen el mismo límite.

Si α_n y β_n son los extremos del intervalo J_n, aparecerán frecuentemente en la aplicación del procedimiento euclidiano las sucesiones:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$
$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

de las cuales la primera es *mónotona creciente* y la segunda *monótona decreciente*, es decir que todo elemento de la primera es superior o igual al que le precede, y todo elemento de la segunda es superior o igual al que le sigue.

Como ejemplo de aplicación del procedimiento euclidiano, demostremos la siguiente proposición:

Si m es un entero positivo y a un número positivo cualquiera, la ecuación

$$x^m = a$$

tiene siempre una raiz positiva.

Elijamos α_0 y β_0 de modo que:

$$\alpha_0{}^m < a < \beta_0{}^m$$

y determinemos, partiendo de $J_0 = [\alpha_0, \beta_0]$, la sucesión euclidiana de intervalos

$$J_0, J_1, \ldots J_n, \ldots$$

de manera que para todo p

(1) $$\alpha_p^m \leqq a \leqq \beta_p^m$$

en que α_p y β_p son los valores correspondientes a los extremos del intervalo J_p.

Si, para cierto intervalo, una de las relaciones (1) se transforma en igualdad, ella nos dará inmediatamente el valor de x.

En caso contrario las dcs sucesiones

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$
$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots,$$

tendrán el mismo límite ω. Este valor límite será la raiz positiva emésima de a:

$$\omega = \sqrt[m]{a}.$$

En efecto, por la regla de la multiplicación, de la que es un caso particular la elevación a potencias enteras, ω^m es el límite común de las sucesiones

$$\alpha_0^m, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_n^m, \ldots$$

y $$\beta_0^m, \beta_1^m, \ldots, \beta_n^m, \ldots,$$

límite común que no puede ser otro que a, desde que, en virtud de (1) el límite de α_p^m es inferior o igual a a y el límite de β_p^m es superior o igual a a.

La teoría de las sucesiones permite pues definir con precisión la extración de raíces de índice entero o racional, aun en el caso de no existir para dicha raíz ningún valor racional. Más adelante generalizaremos la operación de elevación a potencias o extración de raíces, definiéndola para cualquier índice.

LECCION IV

Conjuntos de números

Se dice que una colección de objetos diferentes entre sí, constituye un *conjunto,* cuando poseemos el medio de decidir si un objeto cualquiera dado forma o nó parte de la colección.

Nos ocuparemos ahora exclusivamente de conjuntos de números.

Ya nos hemos ocupado de un caso particular de esta clase de conjuntos, pues no otra cosa son las sucesiones.

Un conjunto se llama *finito* cuando solo contiene un número finito de elementos ; en caso contrario, se llama *infinito.*

Un conjunto es *acotado* cuando se pueden indicar dos números *(cotas)* de los cuales uno sea mayor y otro menor que todos los elementos del conjunto. Así, por ejemplo : es acotado el conjunto de todos los números comprendidos entre cero y uno, pero no lo es el de todos los números racionales.

Todo conjunto finito, y por consiguiente acotado, tiene un elemento mayor y un elemento menor que todos los otros.

No ocurre lo mismo en general con los conjuntos infinitos, aunque sean acotados. Por ejemplo : el conjunto de todos los números irracionales comprendidos entre uno y dos no contiene un elemento mayor ni uno menor que todos los otros.

Se dice que dos conjuntos A y B son *equivalentes,* cuando se puede establecer una correspondencia *biunívoca* entre todos sus elementos, es decir, cuando se puede enunciar una regla que permita hacer corresponder a cada elemento del primer conjunto un solo elemento del segundo, y a cada elemento del segundo un solo elemento del primero.

Por ejemplo: *Dos sucesiones son siempre conjuntos equivalentes.*

La equivalencia se expresa con el signo $\sim$.

De la definición de equivalencia resulta inmediatamente esta proposición:

Dos conjuntos equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.

Es evidente que dos conjuntos finitos serán equivalentes en el caso (y sólo en el caso) de poseer el mismo número de elementos.

El número ω se llama *punto de acumulación* del conjunto A, cuando hay un número infinito de elementos del conjunto comprendidos entre $\omega - \varepsilon$ y $\omega + \varepsilon$, siendo ε un número positivo arbitrariamente pequeño.

Un conjunto finito no puede tener ningún punto de acumulación, pero también es fácil citar conjuntos infinitos desprovistos de puntos de acumulación (por ejemplo: el conjunto de todos los números naturales).

Todo conjunto infinito y acotado tiene por lo menos un punto de acumulación.

Para demostrar esta proposición por el procedimiento euclidiano, determinemos el intervalo

$$J_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$$

de manera que todos los elementos del conjunto propuesto sean mayores que α_0 y menores que β_0. Bisecando este intervalo, una por lo menos de las dos mitades obtenidas posee todavía la propiedad de contener infinitos elementos del conjunto.

Bisecando este nuevo intervalo J_1, se obtendrá otro, J_2, dotado de la misma propiedad.

El límite ω de la sucesión de intervalos resultante:

$$J_0, J_1, J_2, \ldots\ldots, J_n, \ldots\ldots,$$

es por consiguiente un punto de acumulación del conjunto, pues para *n* suficientemente grande, J_n acabará por estar comprendido dentro del intervalo

$$[\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon].$$

Haremos notar expresamente que los puntos de acumulación de un conjunto no siempre son elementos del mismo.

Ejemplo: si una sucesión fundamental de elementos racionales tiene un límite irracional ω, este valor ω es un punto de acumulación, pero no un elemento del conjunto. Los puntos de acumulacion del conjunto formado por todos los números racionales comprendidos entre cero y uno, son todos los números (racionales e irracionales) comprendidos entre cero y uno, incluídos estos últimos. El conjunto de los puntos de acumulactón de A se llama *conjunto derivado* de A y se designa por A'. Si el conjunto derivado del conjunto A comprende todos los números entre a y b, se dice que el conjunto A es *denso* entre a y b.

Confines.

Ya hemos hecho notar que un conjunto infinito y acotado no tiene, en general, un elemento mayor ni uno menor que todos los otros, pero:

Todo conjunto acotado posee un confín superior C y un confín inferior c, definidos por las siguientes condiciones:

1.ª. — *Para cada elemento a del conjunto se tiene:*

$$a \leqq C \text{ y } a \geqq c;$$

2.ª. — *El conjunto contiene por lo menos un elemento a_1 tal que*

$$a_1 > C - \varepsilon$$

y un elemento a_2 tal que

$$a_2 < c + \varepsilon,$$

siendo ε un número positivo arbitrariamente pequeño.

Este teorema puede también demostrarse fácilmente por el procedimiento euclidiano.

Sea $J_0 \equiv [\alpha_0, \beta_0]$, en que β_0 designa un número mayor que todos los elementos del conjunto y α_0 un número menor que algún elemento del conjunto. Por bisecciones sucesivas se obten-

dría una sucesión de intervalos en las mismas condiciones que el J_0, y cuyo límite sería el confín superior C. Analogamente demostraríamos la existencia de c.

Si C es elemento del conjunto, recibe el nombre de *máximo* del conjunto (M). Si c es elemento del conjunto, se le llama *mínimo* del conjunto (m).

Cuando el conjunto es acotado, pero carece de máximo, su confín superior se llama *límite superior* del conjunto (L); cuando carece de mínimo, su confín inferior se llama *límite inferior* del conjunto (l).

Si el conjunto no es acotado se dice que tiene por confín superior $+\infty$ o por confín inferior $-\infty$.

Si el confín superior C o el inferior c no son elementos del conjunto, C o c, es decir L o l, son respectivamente puntos de acumulación del conjunto.

En efecto, si C no es elemento del conjunto, habrá infinitos elementos de éste entre $C - \varepsilon$ y C, pues, si así no fuera, el mayor de estos elementos sería el mayor de todos los del conjunto, contra la hipótesis. Demostración análoga para c.

Máximo y mínimo derivados

Abel y Cauchy introdujeron en el análisis los conceptos que vamos a estudiar enseguida y que este último sabio designó con los nombres de «mayor de los límites» y «menor de los límites». Nosotros emplearemos en vez de esas designaciones las de *máximo derivado y mínimo derivado.*

Teorema: Todo conjunto derivado A' de un conjunto infinito y acotado A, posee un máximo M' y un mínimo m' que llamaremos respectivamente máximo y mínimo derivados del conjunto primitivo.

Como el conjunto derivado A' es acotado (desde que A lo es), tendrá un confín superior C' y un confín inferior c'; si estos no fueran puntos de acumulación de A, habrá por lo menos un punto de acumulación, ω, de A, entre C' y $C' - \varepsilon$, y otro ω' entre c' y $c' + \varepsilon$, por pequeño que sea el número positivo ε.

Existen pues, entre $\omega - \varepsilon$ y C', y entre c' y $\omega' + \varepsilon$ infinitos elementos, del conjunto A y, en consecuencia, también entre $C' - 2\,\varepsilon$ y C' y entre c' y $c' + 2\,\varepsilon$. Luego C' y c' son puntos de acumulación de A, es decir elementos de A'; de donde se deduce que C' y c' son el máximo y el mínimo (M' y m') respectivamente de A'. M' y m' son iguales entre si cuando A tiene un solo punto de acumulación.

Si el conjunto primitivo A no es acotado y el conjunto derivado de él tampoco lo es, diremos que aquel tiene por máximo derivado $+\infty$ o por mínimo derivado $-\infty$.

Los números M' y m' gozan evidentemente de las siguientes propiedades:

1.ª *Por pequeño que sea el número positivo* σ, *el conjunto acotado* A *sólo posee un número finito de elementos* a *tales que*

$$a > M' + \sigma \quad \text{o} \quad a < m' - \sigma;$$

2.ª *Las desigualdades*

$$a > M' - \delta \quad \text{y} \quad a < m' + \delta$$

son satisfechas por infinitos elementos del conjunto, por pequeño que se tome el número positivo δ.

Como consecuencia inmediata de lo que precede podemos enunciar la proposición siguiente:

Si M' *y* m' *son el máximo y el mínimo derivados de la sucesión acotada*

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n,\ \ldots,$$

siempre es posible, dado σ *positivo y arbitrariamente pequeño, determinar el entero positivo* N*, de modo que, para* $n \geqq N$*, se tenga:*

$$a_n < M' + \sigma \quad \text{y} \quad a_n > m' - \sigma;$$

y por otra parte, las desigualdades

$$a_n > M' - \delta \text{ y } a_n < m' + \delta$$

son satisfechas para infinitos valores de n, *por pequeño que sea el número positivo* δ.

Si en la sucesión

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

se tiene $M' = m'$, *la sucesión es convergente y de límite igual a* $M' = m' = \mu$.

En efecto, de

$$\mu - \sigma < a_n < \mu + \sigma$$

resulta, para todo $n \geqq N$,

$$\mu - a_n < \sigma \text{ y } a_n - \mu < \sigma,$$

y por consiguiente

$$|\mu - a_n| < \sigma.$$

Pero si $M' > m'$, la sucesión es oscilante. La diferencia $M' - m'$ se llama entonces *intervalo de oscilación* de la sucesión.

Conjuntos numerables o enumerables

Se dice que un conjunto infinito es *numerable* o *enumerable* cuando sus elementos pueden ordenarse en forma de sucesión, es decir, cuando el conjunto es equivalente al de los números naturales; todos los conjuntos enumerables son pues, equivalentes entre sí.

Ya hemos demostrado que el conjunto de todos los números racionales es enumerable.

Se dice que A es un *conjunto parcial* de B, cuando todos los elementos de A se hallan también en B.

Un conjunto parcial de un conjunto enumerable es también enumerable, o es finito.

La reunión $A + B$, o *conjunto complexivo* de los conjuntos A y B, es el conjunto constituído por todos los elementos de A y aquellos de B que no figuren en A. Es evidente que $A + B = B + A$; la reunión de los tres conjuntos A, B y C puede evidentemente escribirse:

$$(A + B) + C, \text{ o } A + (B + C), \text{ o } A + B + C;$$

quiere decir pues que en esta adición simbólica de los conjuntos, son válidos los principios conmutativo y asociativo, como en la adición aritmética.

Es también evidente que la suma de dos conjuntos enumerables, o de un conjunto enumerable y un conjunto finito, es un conjunto enumerable.

El teorema siguiente es debido a Cantor:

Si los elementos de la sucesión infinita

$$A_1, A_2, A_3, \ldots., A_n, \ldots.$$

son conjuntos enumerables, la suma de todos ellos

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots. + A_n + \ldots.$$

es también un conjunto enumerable.

Sean, en efecto:

$$(1) \qquad a_{p,1}, a_{p,2}, a_{p,3}, \ldots., a_{p,q}, \ldots.$$

todos los elementos de A_p que no figuren en ninguno de los conjuntos precedentes; el conjunto (1), si existe, es finito o enumerable. Si (1) no existe, prescindiremos de A_p al formar la suma

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots. + A_n + \ldots.$$

Pero los elementos del conjunto constituído por todos los elementos de los conjuntos

$$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots,$$

transformados como el A_p, pueden ordenarse en sucesión del siguiente modo :

$$a_{1,1};\ a_{1,2},\ a_{2,1};\ a_{1,3},\ a_{3,1},\ a_{2,2};\ \ldots,$$

reuniendo en grupos sucesivos los elementos en que la suma de los subíndices es constante.

Todo elemento $a_{p,q}$, de alguno de los conjuntos dados, se hallará en el grupo correspondiente a la suma $p+q$, es decir, ocupará una posición determinada y podrá atribuírsele también un índice determinado.

Continuo lineal

El conjunto constituído por todos los números comprendidos entre dos números dados a y b ($a < b$), se llama *continuo lineal* entre a y b o intervalo [. a, b .]; (escribiremos [a, b] cuando queramos excluir a y b).

El confín a del intervalo se llama su *origen* y el confín b su *extremo*.

Demostraremos una serie de teoremas relativos a estos conjuntos.

Dos continuos lineales, finitos o infinitos, son siempre equivalentes.

Sean a, b, c y d cuatro números finitos.

Si escribimos la ecuación

$$\frac{y-c}{d-c} = \frac{x-a}{b-a}$$

x y y quedarán recíprocamente relacionados, y si x recorre el continuo lineal [. a, b .], y recorrerá al mismo tiempo el continuo [. c, d .], y viceversa. Por consiguiente :

$$[\,.\, a, b \,.\,] \sim [\,.\, c, d \,.\,].$$

Si hacemos $c = 0$ y $d = 1$,

$$[\ .\ a, b\ .\ ] \sim [\ .\ 0, 1\ .\ ].$$

Para demostrar ahora la equivalencia

$$[\ .\ a, b\ .\ ] \sim [\ .\ 0, 1\ .\ ] \sim [\ .\ 0, \infty\ ],$$

observemos que

$$\left[\ .\ \frac{1}{2}, 1\ .\ \right] \sim \left[\ .\ 0, 2\ .\ \right],$$

$$\left[\ \frac{1}{2}, 1\ \right] \sim \left[\ 0, 2\ \right]$$

y

$$\left[\ \frac{1}{2}, 1\ .\ \right] \sim \left[\ .\ 0, 2\ \right],$$

si hacemos corresponder a uno, cero. Si después hacemos

$$y = \frac{1}{x},$$

se obtiene también

$$\left[\ 0, \frac{1}{2}\ .\ \right] \sim \left[\ .\ 2, \infty\ \right].$$

De la suma de las dos equivalencias, resulta $[\ 0, 1\ .\ ] \sim [\ .\ 0, \infty\ ]$, o, tomando en $[\ 0, 1\ .\ ]$ un conjunto enumerable de elementos $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, y sustituyéndolo por el conjunto equivalente $0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots$, tendremos finalmente $[\ .\ 0, 1\ .\ ] \sim [\ .\ 0, \infty\ ]$.

Los continuos son conjuntos esencialmente distintos de los conjuntos enumerables.

Así resulta del siguiente teorema de Cantor:

Un continuo lineal es un conjunto no enumerable.

Antes de ocuparnos de este teorema tenemos que demostrar la siguiente proposición que se conoce con el nombre de teorema de Stolz.

Todo número positivo puede desarrollarse (y de un solo modo) en fracción decimal que contenga un número infinito de cifras diferentes de cero.

Si el número es racional, su desarrollo en fracción decimal de infinitas cifras significativas se obtiene por los procedimientos conocidos de la aritmética elemental.

Si el número es irracional, su definición mediante una sucesión fundamental permitirá siempre, teóricamente al menos, decidir entre qué números enteros consecutivos se encuentra su valor. Llamemos n y $n + 1$ esos dos enteros consecutivos.

Las cifras enteras del desarrollo serán entonces las del número n.

Llamando n_1 a una de las diez cifras $0, 1, 2, 3, \ldots . 9$, el número irracional propuesto, mayor que n y menor que $n + 1$, será superior a n en más de $\frac{n_1}{10}$ y en menos de $\frac{n_1 + 1}{10}$. La primera cifra decimal del desarrollo será pues n_1.

Continuando así este procedimiento, obtendríamos sucesivamente, aplicando cada vez el criterio que sirve para decidir si un número irracional es mayor o menor que otro racional, tantas cifras decimales del desarrollo cuantas quisiéramos.

Como el número de éstas no puede ser finito, porque si lo fuera la fracción decimal equivaldría a un número racional, la primera parte del teorema queda también demostrada para un número irracional.

Imaginemos, para demostrar la segunda parte, dos fracciones decimales infinitas a y b, cuyas cifras no sean todas respectivamente iguales. Vamos a demostrar que $a \neq b$.

Supongamos que las dos primeras cifras correspondientes que difieren entre sí, ocupan el lugar enésimo de cada fracción, y que la mayor de ellas es la de a. Llamemos a' la fracción decimal obtenida disminuyendo en una unidad dicha cifra de a, sustituyendo por 9 todas las cifras que siguen (si ya no son todas ellas 9) y conservando inalteradas las que preceden. Tendremos evidentemente $a > a'$. Cambiemos en b todas las cifras que siguen a la ené-

sima sustituyéndolas por 9 (si ya no son 9) y llamemos b' la fracción decimal resultante. Tendremos: $a' \geqq b'$, $b' \geqq b$.

De estas dos igualdades — desigualdades y de la desigualdad $a > a'$, se deduce $a > b$.

Podemos demostrar ahora el teorema de Cantor. Bastará, puesto que todos los continuos lineales son equivalentes, probar que el continuo $[\,0, 1\,.\,]$ no es enumerable. En virtud del teorema de Stolz, cada elemento de este continuo puede desarrollarse en fracción decimal infinita. Si $[\,0, 1\,.\,]$ fuera enumerable, sus elementos podrían ordenarse en sucesión

$$(1) \qquad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_p,\ \ldots$$

en que m_p representa una fracción decimal infinita propia.

Que esto no es posible lo demostró Cantor empleando un procedimiento del que veremos algún otro ejemplo y que se llama *procedimiento de la diagonal*. La sucesión (1), si existiera, podría escribirse en la forma siguiente:

$$m_1 = 0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ \ldots,$$

$$m_2 = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ b_5\ \ldots,$$

$$m_3 = 0,\ c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5\ \ldots,$$

$$m_4 = 0,\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ d_5\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

representando por

$$a_1, a_2 \cdot a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots, c_1, c_2, c_3, \ldots$$

cifras cualesquiera.

Toda fracción decimal infinita debería entonces hallarse en el cuadro precedente. Esto no ocurre, sin embargo, como resulta del hecho de que puede formarse una fracción decimal infinita pro-

pia que no figure en dicho cuadro. Esta fracción se obtiene, en efecto, escribiendo, después de la coma, una cifra diferente de a_1, después otra diferente de b_2, luego otra diferente de c_3, etc., es decir:

$$0, a'_1 \; b'_2 \; c'_3 \; d'_4 \; \ldots\ldots$$

en que

$$a'_1, \; b'_2, \; c'_3, \; d'_4, \; \ldots\ldots$$

son cifras diferentes de las correspondientes de la diagonal del cuadro.

La siguiente proposición se debe también a Cantor: *Si se eliminan del continuo lineal K todos los elementos de un conjunto enumerable o finito cualquiera, que suponemos contenidos en K, los elementos restantes constituyen un conjunto equivalente al continuo lineal.*

Demostraremos antes el siguiente lema:

Si del continuo lineal [. 0, 1 .] *se eliminan los elementos de un conjunto enumerable, todos contenidos en él, el conjunto restante contiene todavía un conjunto enumerable.*

En efecto, escribiendo el conjunto enumerable en forma de sucesión:

$$0, a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; \ldots.,$$

$$0, b_1 \; b_2 \; b_3 \; b_4 \; \ldots.,$$

$$0, c_1 \; c_2 \; c_3 \; c_4 \; \ldots.,$$

. . . .,

se obtendría otro conjunto enumerable contenido en el continuo y sin ningún elemento común con el anterior, escribiendo en la siguiente forma sus elementos sucesivos (todos evidentemente diferentes entre sí):

$$0,\ a'_1\ b'_2\ c'_3\ d'_4\ \ldots,$$

$$0,\ a_1\ a'_2\ b'_3\ c'_4\ \ldots,$$

$$0,\ a_1\ a_2\ a'_3\ b'_4\ \ldots,$$

$$0,\ a_1\ a_2\ a_3\ a'_4\ \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en que

$$a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ b'_2,\ \ldots$$

representan cifras respectivamente diferentes de

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ b_2,\ \ldots$$

Demostrado así el lema, sean K el continuo y N el conjunto enumerable, y sea:

$$K = N + K_1;$$

entonces K_1 no puede ser ni finito ni enumerable, pues en cualquiera de estos dos casos K sería enumerable.

Sea N_1 otro conjunto parcial enumerable contenido en K_1 y pongamos:

$$K_1 = N_1 + K_2;$$

será

$$K = N + N_1 + K_2.$$

Pero $$N_1 \sim N + N_1,$$

pues N y N_1 son conjuntos enumerables; por consiguiente:

$$K \sim K_1.$$

Por ejemplo: el conjunto de todos los números irracionales entre 0 y 1 es equivalente al continuo lineal; un continuo abierto es equivalente a un continuo cerrado ($[\, a, b \,] \sim [\, . \, a, b \, . \,]$); etc.

Es fácil demostrar que, inversamente, $K + N \sim K$. En efecto $K = K_1 + N_1 \sim K + N$, haciendo corresponder los elementos de K con los de K_1 (teorema directo) y los de N_1 con los de N. Con este último objeto se tomará N_1 = conj. enum. si N lo es, o, si N es finito, se tomará N_1 finito también y con igual número de elementos que N.

LECCION V

Números trascendentes

Los números pueden dividirse en dos categorías: *números algebraicos y números trascendentes*.

Toda raíz de una ecuación de exponentes enteros y coeficientes racionales es por definición un número algebraico. Los números que no pueden identificarse con ninguna raíz de una ecuación de aquel tipo se llaman trascendentes.

No hay necesidad de demostrar la existencia de los números algebraicos; pero la existencia de los números trascendentes no es, en manera alguna, evidente.

Liouville fué el primero en dar ejemplos de números trascendentes (los números llamados de Liouville). Algo después, en 1873, logró Hermite probar la trascendencia de e, cuya irracionalidad ya había sido demostrada por Euler; y, empleando un procedimiento análogo al de Hermite, Lindemann, en 1882, hizo ver que π es también un número trascendente: descubrimiento este último del que fluye la imposibilidad del famosísimo problema de la cuadratura del círculo.

Los números trascendentes son de diversos ordenes según el grado de la ecuación irreducible, de coeficientes racionales, de donde proceden. Una ecuación de exponentes enteros y coeficientes racionales se llama irreducible cuando no puede descomponerse en el producto de dos o más ecuaciones de exponentes enteros y coeficientes racionales.

Es fácil demostrar que hay ecuaciones irreducibles de todos los grados, y por consiguiente números algebraicos de todos los órdenes; y también que un número algebraico es siempre de un órden perfectamente determinado.

Lo primero se prueba con el ejemplo de las ecuaciones binomias de cualquier grado:

$$x^n - 2 = 0;$$

porque, si $x^n - 2$ contuviera el factor polinómico de coeficientes racionales y de grado m ($m < n$):

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m),$$

en que

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$$

son las raíces de la ecuación obtenida igualando a cero dicho factor polinómico: entonces

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 \times \ldots \times \alpha_m$$

sería racional e igual, por ejemplo, a la fracción $\frac{a}{b}$, en que suponemos a y b primos entre sí.

Pero

$$(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)^n = \alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_m^n = 2^m = \frac{a^n}{b^n},$$

es decir:

$$a^n = 2^m b^n,$$

lo que exige que el primer miembro tenga a 2^n como factor y por lo tanto que en el segundo miembro b tenga a 2 como factor, contrariamente a la condición de ser a y b primos entre sí.

Lo segundo se demuestra observando que, si dos ecuaciones de coeficientes racionales tienen una o más raíces comunes, su común divisor existe y, como éste ha de ser un polinomio entero de coe-

ficientes racionales, la reducibilidad de una por lo menos de las dos ecuaciones propuestas, queda evidenciada.

Llamaremos *números de Liouville* las fracciones decimales infinitas que pueden escribirse bajo la forma :

$$\frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^{n!}},$$

en que

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$$

son números enteros menores que *10*.

La trascendencia de los números de Liouville resulta del siguiente teorema :

Si

$$\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots\ldots, \frac{p_n}{q_n}, \ldots\ldots$$

(en que $p_0, q_0; p_1, q_1; \ldots\ldots$ *son enteros positivos) es una sucesión que tiene por límite un número algebraico y positivo b de órden m,* $(m > 1)$*, se puede afirmar que, para todo* $\frac{p_n}{q_n}$ *de sub-índices iguales o superiores a cierto entero positivo N, se verifica la desigualdad*

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - b \right| > \frac{1}{q_n^{m+1}}.$$

En efecto, sea la ecuación irreducible, de coeficientes enteros y de grado *m*, satisfecha por *b*:

$$f(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

y sea $\frac{p}{q}$ un número racional y positivo diferente de *b*, compren-

dido dentro de cierto intervalo δ que contenga a b y no contenga a ninguna otra de las raíces de $f(x) = 0$.

Tendremos

$$f(b) = 0,$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \equiv f\left(b + \frac{p}{q} - b\right) = f(b) + \left(\frac{p}{q} - b\right) \times$$

$$f'(y) = \left(\frac{p}{q} - b\right) f'(y),$$

designando y un cierto número comprendido entre $\frac{p}{q}$ y b.

Será además siempre posible determinar un entero M mayor que cualquiera de los valores $|f'(y)|$ que se obtienen haciendo variar y entre $\frac{p}{q}$ y b.

Por consiguiente:

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| < M \left| \frac{p}{q} - b \right|.$$

Pero

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{A}{q^m},$$

en que A designa un número entero mayor que cero; y por lo tanto:

$$\left| \frac{p}{q} - b \right| > \frac{1}{M \times q^m}.$$

Ahora bien, como sólo hay un número finito de quebrados comprendidos dentro de un intervalo finito y cuyos denominadores sean menores que un número dado M, podemos tomar dentro del

intervalo δ otro intervalo ε, bastante pequeño para que los denominadores de las fracciones comprendidas en él no sean nunca menores que M; y entonces eligiendo $\frac{p}{q}$ dentro de ε, podemos escribir:

$$\left| \frac{p}{q} - b \right| > \frac{1}{q^{m+1}}.$$

Tomando finalmente N tal que, para $n \geqq N$, $\frac{p_n}{q_n}$ esté dentro del intervalo ε, se tendrá:

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - b \right| > \frac{1}{q_n^{m+1}}.$$

Demostrado el teorema, supongamos que uno de los números de Liouville, que designaremos con la letra L, fuera algebraico de órden m.

Si llamamos L_n la suma de los n primeros términos de L, y R_n al resto

$$\frac{a_{n+1}}{10^{(n+1)!}} + \frac{a_{n+2}}{10^{(n+2)!}} + \ldots ,$$

resultará de dicho teorema:

$$R_n = L - L_n > \frac{1}{10^{n!(m+1)}}.$$

Pero

$$R_n \leqq \frac{a_{n+1} + 1}{10^{(n+1)!}} \leqq \frac{10}{10^{(n+1)!}} = \frac{10}{10^{n!n}\, 10^{n!}} <$$

$$\frac{10}{10^{n!n}} < \frac{1}{10^{n!(m+1)}},$$

con sólo tomar $n > m + 1$.

Luego R_n sería a la vez mayor y menor que cierto número, lo que nos dice que la hipótesis de que L sea un número algebraico es inadmisible.

El conjunto de los números de Liouville es equivalente al continuo.

Basta, para demostrarlo, hacer corresponder los elementos :

$$L = \frac{a_1}{10^{1!}} + \frac{a_2}{10^{2!}} + \frac{a_3}{10^{3!}} + \cdots \text{ y}$$

$$C = \frac{b_1}{10^1} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \cdots$$

en que los numeradores de los respectivos términos son iguales.

Los números de Liouville no comprenden, sin embargo, todos los números trascendentes. Así, por ejemplo, e y π no son números de Liouville.

La existencia de los números trascendentes y la equivalencia de su conjunto al continuo lineal, ha sido, después, demostrada de la siguiente manera por Cantor.

Empezaremos por mostrar que el conjunto de los números algebraicos es enumerable; y luego, invocando un teorema (ya demostrado) del mismo Cantor, que afirma la equivalencia entre el continuo lineal y el conjunto obtenido eliminando de él todos los elementos de cualquier conjunto enumerable, completaremos fácilmente la demostración.

Probemos pues que el conjunto de los números algebraicos es enumerable.

Llamemos *altura* de una ecuación irreducible cuyos coeficientes se han transformado en números enteros sin factor común, al número :

$$H = n - 1 + |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|,$$

representando n el grado de la ecuación, y

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

sus coeficientes.

Es evidente entonces que, dado H, el grado n tiene un valor máximo, puesto que a continuación de $n - 1$ sólo hay sumandos positivos en la expresión de H, lo que equivale a decir que, para H dado, sólo hay un número limitado de valores de n posibles.

Para cada uno de estos valores posibles de n, el número de ecuaciones posibles de altura H, es también evidentemente limitado.

De estas ecuaciones hay todavía que excluir las que son reducibles. Luego, a cada valor de H, corresponderá un número finito de números algebraicos.

Ordenemos entonces los números algebraicos, primero por grupos finitos correspondientes a los valores crecientes de H, y en cada grupo coloquemos los números que lo forman, según su valor creciente. Atribuiremos así a cada número algebraico, sin excluir ninguno, un lugar determinado, es decir, que habremos obtenido el medio de formar la sucesión de todos los números algebraicos, mostrando así que su conjunto es enumerable.

En la tabla siguiente figuran en la última columna los primeros números algebraicos ω de la sucesión obtenida por este procedimiento:

H	$\lvert n \rvert$	$\lvert a_0 \rvert$	$\lvert a_1 \rvert$	$\lvert a_2 \rvert$	$\lvert a_3 \rvert$	Ecuación	ω
1	1	1	0			$X = 0$	0
	2	0	0	0		—	
2	1	2	0			—	-1;
		1	1			$X \pm 1 = 0$	$+1$.
	2	1	0	0		—	
3	1	3	0			—	-2;
		2	1			$2X \pm 1 = 0$	$-\frac{1}{2}$;
		1	2			$X \pm 2 = 0$	$+\frac{1}{2}$;
	2	2	0	0		—	$+2$.
		1	1	0		$X^2 \pm 1 = 0$	
		1	0	1		$X^2 \pm 1 = 0$	
	3	1	0	0	0	—	

Hasta ahora hemos visto dos tipos de conjuntos infinitos: los enumerables y los continuos lineales. Los primeros, hemos demostrado que son equivalentes entre sí; y también hemos demostrado que son equivalentes entre sí los segundos.

Hemos demostrado finalmente que un conjunto enumerable es un conjunto parcial con respecto a un continuo, sin ser equivalente a él. Por esa razón se dice que el conjunto enumerable es de una potencia inferior a la del continuo.

Surge entonces la duda de si no existirán conjuntos de una potencia superior a la del continuo.

Parece a primera vista que el conjunto de todos los pares de coordenadas que definen a todos los puntos de un cuadrado, de-

biera poseer una potencia superior a la del continno lineal constituído por todos los números que son representativos de las abscisas.

No ocurre así, sin embargo, y vamos a demostrarlo estableciendo una correspondencia biunívoca entre todos los puntos del cuadrado y los de uno de sus lados.

Para eso, supongamos que el lado del cuadrado elegido es el que tomamos como eje de las abscisas, y que su longitud es igual a la unidad. Cada punto de este eje estará definido por una fracción decimal infinita propia, que descompondremos en dos fracciones del mismo tipo, escribiendo como parte decimal de la primera la serie infinita de las cifras de orden par, y como parte decimal de la segunda la serie infinita de las cifras de orden impar; así por ejemplo, la abscisa

0, 1 2 3 4 5 6 . . . . .

se descompondrá en los números:

0, 1 3 5 . . . . y 0, 2 4 6 . . . .

Quiere decir que podremos hacer corresponder a cada abscisa un par de números que, considerados como abscisa y ordenada de un punto del plano, definirán un punto del cuadrado propuesto. El procedimiento inverso nos permitiría hacer corresponder a cada punto del cuadrado un punto de uno de sus lados. Para evitar la formación de fracciones decimales no infinitas, cuando a partir de cierta cifra de la abscisa todas las siguientes de orden par o de orden impar sean ceros, convendremos en hacer el desdoblamiento tomando, si es necesario, en vez de cifras simples, grupos de cifras de las cuales la última sea siempre significativa. Así la fracción decimal

0, 0 1 0 2 0 3 0 4 0 5 0 6 . . . .

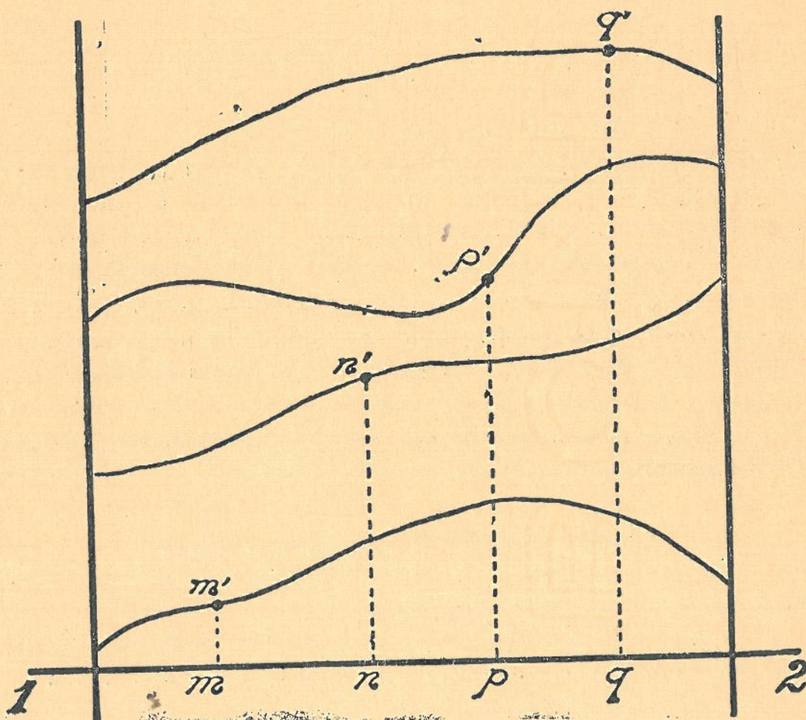
se descompondría en:

0, 0 1 0 3 0 5 . . . . y 0, 0 2 0 4 0 6 . . . .

Analogamente demostraríamos que el conjunto de todos los puntos comprendidos dentro del volumen de un cubo de lado igual a la unidad, es de la misma potencia que el continuo lineal.

Existen, sin embargo, conjuntos de potencia superior a la de este último. Tal es el conjunto de todas las funciones imaginables que puedan representarse por curvas, es decir, funciones algebraicas y trascendentes continuas y funciones definidas simplemente por curvas gráficas. Daremos una idea de la demostración de este aserto.

Imaginemos, en efecto, que en el interior de dos ordenadas trazadas a una distancia igual a la unidad, dibujamos algunas de esas curvas. Vamos a demostrar que si suponemos, por absurdo, establecida la correspondencia biunívoca entre dichas curvas y todos los puntos del segmento del eje de las abscisas interceptado por aquellas dos ordenadas, podremos definir una curva que no sea ninguna de las consideradas.



Imaginemos que por cada punto $m, n, p, q, \ldots$ del continuo lineal [. 1, 2 .] levantamos perpendiculares que cortarán a las curvas correspondientes a esos puntos en $m', n', p', q', \ldots$ respectivamente. No habrá más que construir una curva que evite todos esos puntos $m', n', p', q', \ldots$ para obtener una curva y por consiguiente una función a la cual no corresponderá ninguno de los puntos de [. 1, 2 .]. Como el continuo es un conjunto parcial del constituído por todas las funciones imaginables, es evidente que este último conjunto contiene conjuntos equivalentes al continuo; por ejemplo el conjunto de las funciones $y — x^m$ (dando a m todos los valores del continuo); y es, por consiguiente, de una potencia superior a la del continuo.

Se demuestra también que pueden definirse conjuntos de potencias siempre mayores y todas ellas superiores a la del continuo.

Es interesante, en fin, mostrar que los puntos de un conjunto enumerable tomado en el continuo [. 0, 1 .] ocupan un lugar menor que toda longitud dada, entendiendo que para medir ese lugar rodearemos a cada punto de un pequeño intervalo que lo contenga. Como el conjunto es enumerable, los números correspondientes a cada uno de esos puntos pueden escribirse en forma de sucesión. Imaginemos alrededor del primer punto un intervalo de una longitud igual a $\frac{1}{10}$; alrededor del segundo punto, un intervalo igual a $\frac{1}{100}$; etc. Si imaginamos colocados estos intervalos los unos a continuación de los otros, la extensión total cubierta por ellos será igual a la suma de la progresión geométrica infinita :

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = \frac{1}{9}.$$

Nada nos impediría elegir otra serie de intervalos que constituyera una progresión geométrica de suma arbitrariamente pequeña, por ejemplo :

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \ldots = \frac{1}{99}$$

La extensión total ocupada por esos intervalos es pues tan pequeña como se quiera.

Para los números restantes del continuo lineal cuyo conjunto hemos visto que es equivalente al mismo continuo lineal, su medición, por cualquier método que se hiciera, no podría conducir al mismo resultado: porque, de ser así, los intervalos cuya suma constituiría la medida de este conjunto equivalente al continuo, no llenarían, agregados a los intervalos correspondientes al conjunto enumerable, todo el continuo [. *0*, *1* .], y habría por lo tanto puntos de este continuo que no pertenecerían ni al conjunto enumerable ni al conjunto residuo.

LECCION VI

Teoría de las series de términos numéricos

Series convergentes.
El valor límite

$$S = \lim_{n = \infty} . s_n$$

de la sucesión, que suponemos convergente

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

en que s_n representa la suma de los n primeros términos de la serie (que también se llama entonces convergente):

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

es, por definición, la suma de esta serie.
La diferencia

$$R_{n+p} = s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p},$$

se llama *resto parcial* de la serie. La diferencia

$$S - s_n$$

se llama *resto total*
Ejemplo 1.º

Se tiene

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\,.\,.\,.\,.=1,$$

a causa de la identidad

$$\frac{1}{p\,(p+1)}\equiv\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1},$$

de la cual resulta

$$s_n=1-\frac{1}{n+1},\quad 1-s_n=\frac{1}{n+1}<\varepsilon \text{ para } n>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Ejemplo 2.º
Para $|\,q\,|<1$ se tiene:

$$a+a\,q+a\,q^2+\,.\,.\,.+a\,q^n+\,.\,.\,.=\frac{a}{1-q}.$$

En efecto:

$$s_n=a\,\frac{1-q^n}{1-q};\quad \frac{a}{1-q}-s_n=q^n\,\frac{a}{1-q},\quad \left|\frac{a}{1-q}-s_n\right|$$
$$\leqq\left|\,q\,\right|^n\frac{|\,a\,|}{1-|\,q\,|}.$$

Pero

$$\left|\,q\,\right|^n<\frac{|\,q\,|}{n\,(1-|\,q\,|)};$$

$$\Big[\text{ si }\quad a>1,\ a^n\equiv(a-1+1)^n>n\,(a-1);$$

si $0 < b < 1$, $\frac{1}{b^n} > n\left(\frac{1}{b} - 1\right)$ y por consiguiente

$$b^n < \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{1-b}\Big];$$

luego :

$$\left| \frac{a}{1-q} - s_n \right| < \frac{|aq|}{(1-|q|)^2} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\text{para } n > \frac{|aq|}{(1-|q|)^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Series divergentes.

En el caso de $\lim |s_n| = +\infty$, la serie se llama propia o impropiamente divergente, según pertenezca a una u otra categoría la sucesión

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

Ejemplo 1.°

La llamada serie armónica :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

es propiamente divergente.

Si se determina, en efecto, el entero positivo p de modo que

$$2^p \leqq n < 2^{p+1}$$

y se tienen presentes las relaciones, siempre verdaderas para todo entero $q \geqq 0$:

$$1 > \frac{2\,q}{2^q + 1} \geqq \frac{1}{2^q + 1} + \frac{1}{2^q + 2} + \ldots +$$

$$\frac{1}{2^{q+1}} \geqq \frac{2^q}{2^{q+1}} = \frac{1}{2},$$

resulta

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots +$$

$$\frac{1}{2^p} > \frac{1}{1} + p \cdot \frac{1}{2}$$

y

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots +$$

$$\frac{1}{2^{p+1}} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + p.$$

Ejemplo 2.º.
Si suponemos $| q | > 1$, la progresión geométrica:

$$a + a\,q + a\,q^2 + \ldots + a\,q^n + \ldots$$

es divergente, y propia o impropiamente tal, según q sea positiva o negativa.

Designemos en efecto con E, un número positivo y arbitrariamente grande, y tendremos, partiendo de la igualdad:

$$S_n = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a\,q^n}{q - 1} - \frac{a}{q - 1},$$

las siguientes igualdades—desigualdades:

$$|S_n| \geqq \left| \frac{a q^n}{q-1} \right| - \left| \frac{a}{q-1} \right| \geqq \frac{|a| . |q|^n}{|q|+1} -$$

$$\frac{|a|}{|q|-1} > \frac{n |a| . (|q|-1)}{|q|+1} - \frac{|a|}{|q|-1} > E$$

para $$n > \frac{|q|+1}{|q|-1} . \frac{E}{|a|} + \frac{|q|+1}{(|q|-1)^2}$$

Series oscilantes.

Son aquellas en que la sucesión

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

es oscilante.

Así, la serie del último ejemplo es oscilante si $q = -1$, porque entonces:

$$s_{2n} = 0 \qquad \text{y} \qquad s_{2n+1} = a.$$

Recordando la definición de convergencia, podemos enunciar la siguiente proposición:

Si ε *es una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, la condición necesaria y suficiente para la convergencia de una serie es que pueda hallarse un entero N bastante grande para que, siendo* $n \geqq N$ y p *un entero positivo arbitrario:*

$$|R_{n,p}| < \varepsilon.$$

Para $n = 1$ se tiene, en especial:

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0$$

como condición necesaria, pero no suficiente, de la convergencia.

Una serie cuyos términos son todos positivos es convergente o propiamente divergente.

En efecto, la sucesión de las sumas parciales es monótona creciente; no puede ser por lo tanto ni oscilante ni impropiamente divergente.

Ejemplo:

La serie

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\dots+\frac{1}{n^2}+\dots\dots$$

es convergente, pues para $p > 1$:

$$\frac{1}{p^2}<\frac{1}{(p-1)\,p},$$

y por consiguiente, ya que :

$$\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{2\,.\,3}+\frac{1}{3\,.\,4}+\dots\dots=1,$$

las sumas parciales de la serie de este ejemplo son siempre menores que 2.

Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos y en que $\lim\limits_{n=\infty} | u_n | = 0$, es convergente.

Ejemplo :

La serie de Brouncker

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots\dots$$

es convergente.

En efecto, para cualquier valor de n

$$s_{2n}=\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{3\,.\,4}+\frac{1}{5\,.\,6}+\dots\dots<1;$$

luego el límite de s_{2n} existe y es finito.

Además

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1};$$

de donde:

$$\lim_{n=\infty} s_{2n+1} = \lim_{n=\infty} s_{2n} .$$

Series absolutamente convergentes y semi-convergentes

Si se colocan, ordenándolos de diversos modos, los términos de una serie infinita y convergente Σu_n, las sumas parciales cambian generalmente de valor; las nuevas series así deducidas de Σu_n no suelen tener la misma suma total, y puede acontecer inclusive que algunas de ellas ni siquiera sean convergentes.

Vamos a aclarar esto con dos ejemplos: los de las series convergentes

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots .$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots .$$

Ejemplo 1.º:

Hagamos para abreviar:

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

y

$$\omega_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Se tiene entonces evidentemente:

$$a_{2n} - a_n = \omega_n,$$

y de la identidad:

$$a_n = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2_n}\right),$$

se deduce la siguiente expresión para ω_n:

$$(1) \quad \omega_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2_n + 1} - \frac{1}{2_n}.$$

Hemos visto que esta última expresión tiende a un límite que llamaremos Q, luego:

$$\lim_{n=\infty} \omega_n = Q.$$

Si ahora ponemos, para todo valor entero y positivo de n:

$$(2) \qquad b_n = \sum_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{4p+2} - \frac{1}{4p+4} \right),$$

resultará, en virtud de (1):

$$\omega_n - b_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+4} + \ldots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\,\omega_n.$$

Cualquiera que sea n, se tiene, pues:

$$b_n = \frac{1}{2}\,\omega_n,$$

es decir:

$$\lim_{n=\infty} b_n = \frac{1}{2}\,Q$$

La serie:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots.,$$

formada aplicando la fórmula (2), y que no es otra que la serie de límite Q;

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

con sus términos en distinto orden, tiene así por límite

$$\frac{Q}{2}.$$

Ejemplo 2.º
De la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{2p+2}}\left(=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4p+4}}=\frac{2}{\sqrt{4p+4}}-\left(2-\sqrt{2}\right)\frac{1}{\sqrt{4p+4}}\right)=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{4p+4}}-\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

resulta, para n entero y positivo :

$$\sum_{p=0}^{p=n}\left(\frac{1}{\sqrt{4p+1}}+\frac{1}{\sqrt{4p+3}}-\frac{1}{\sqrt{2p+2}}\right)=\sum_{p=0}^{p=n}\left(\frac{1}{\sqrt{4p+1}}-\frac{1}{\sqrt{4p+4}}\right)$$

$$+\sum_{p=0}^{p=n}\left(\frac{1}{\sqrt{4p+3}}-\frac{1}{\sqrt{4p+4}}\right)+\left(1-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\sum_{p=0}^{p=n}\frac{1}{\sqrt{p+1}}$$

Si hacemos crecer n más allá de todo límite, se obtiene, en el segundo miembro de la anterior igualdad, la suma de tres series: dos convergentes y una divergente. La serie del primer miembro es, en consecuencia, divergente.

Sea $R_{n,p}$ el resto parcial de la serie infinita $\Sigma\, u_n$; se tendrá siempre :

$$|\, R_{n,p}\, | \leqq |\, u_{n+1}\,| + |\, u_{n+2}\,| + |\, u_{n+3}\,| + \cdots + |\, u_{n+p}\,|.$$

Luego, *si es convergente la serie formada con los valores absolutos de los términos de* $\Sigma\, u_n$, *también lo será dicha serie* $\Sigma\, u_n$.

En este caso se dice que la serie $\Sigma\, u_n$ es ***absolutamente convergente.***

Si la serie $\Sigma \mid u_n \mid$ no es convergente, siéndolo la serie $\Sigma\, u_n$, se dice que ésta es *relativamente convergente* o *semi-convergente*.

Las dos series recién consideradas son semi-convergentes.

Con referencia a las series absolutamente convergentes, vamos a demostrar el siguiente teorema que se debe a *Lejeune—Dirichlet*.

Si se permutan de un modo cualquiera los términos de una serie absolutamente convergente, la serie resultante tiene la misma suma que la serie primitiva y es, como ella, absolutamente convergente.

Sean respectivamente $\Sigma\, u_n$ y $\Sigma\, u'_n$ la serie primitiva y la serie transformada.

Llamemos U_n y U'_n las sumas parciales correspondientes :

$$U_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot + u_n,$$

$$U'_n = u'_1 + u'_2 + u'_3 + \cdot\cdot\cdot\cdot + u'_n.$$

Resulta evidentemente

$$U_n - U'_n = u_{p_1} + u_{p_2} + u_{p_3} + \cdot\cdot\cdot\cdot + u_{p_i} -$$

$$(u_{r_1} + u_{r_2} + u_{r_3} \cdot\cdot\cdot\cdot + u_{r_i}),$$

en que las u_p son los términos de U_n que no aparecen en U'_n y las u_r son los términos de U'_n que no aparecen en U_n.

Cada uno de los números p es pues inferior o igual a n, y cada uno de los números r es mayor que n.

Sea ahora $n - q$ el menor de los números p, y $n + l$ el mayor de los números r; podremos, a causa de la última igualdad, escribir :

$$\left| U_n - U'_n \right| < \sum_{k=0}^{k=q+l} \left| u_{n-q+k} \right|$$

Pero $n - q$ crece indefinidamente con n; luego podrá determinarse un entero positivo N tal que, para todo $n \geqq N$ sea siempre:

$$| U_n - U'_n | < \varepsilon,$$

pues la sumación del segundo miembro de la igualdad - desigualdad que precede, es el resto parcial

$$R_{n-q-1,\, q+1+1}$$

de la serie convergente $\Sigma \mid u_n \mid$.

Así queda demostrado que $U = U'$.

Como $\Sigma \mid u_n \mid$ es también una serie absolutamente convergente, resulta:

$$\Sigma \mid u'_n \mid = \Sigma \mid u_n \mid,$$

es decir que $\Sigma\, u'_n$ es absolutamente convergente.

Series cuya suma puede alterarse permutando sus términos

Al teorema de Lejeune—Dirichlet corresponde, para las series relativamente convergentes, una proposición, debida a *Riemann*, que se enuncia así:

Mediante una oportuna permutación de los términos de una serie semi-convergente, se puede obtener otra serie cuya suma sea igual a una cantidad arbitrariamente fijada.

Si la serie $\Sigma\, u_n$ converge, pero no absolutamente, contendrá infinitos términos positivos e infinitos negativos.

Sean α_n los términos positivos y β_n los negativos.

Las dos series

$$(1) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots . + \alpha_n + \ldots . \qquad \text{y}$$

$$(2) \qquad - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \ldots . - \beta_n - \ldots$$

serán divergentes, y además

(3) $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$ y $\lim_{n=\infty} \beta_n = 0.$

Sea ω la cantidad arbitraria previamente fijada; tenemos que demostrar que una permutación, convenientemente elegida, de los términos de $\Sigma\, u_n$ conduce a otra serie de suma ω, que designaremos por $\Sigma\, u'_n$.

Como las series (1) y (2) son necesariamente divergentes, se puede, partiendo de un término cualquiera, formar un grupo de términos consecutivos de cada serie, de modo que el valor absoluto de su suma sea tan grande como se quiera.

Supongamos, para fijar las ideas, que ω es positivo, y consideremos los primeros términos de (1) que den una suma

$$A_1 = \omega + \gamma_1$$

en que γ_1 sea una cantidad positiva.

De la serie (2) tomemos los primeros términos cuya suma pueda representarse por

$$A_2 = -\gamma_1 - \gamma_2,$$

en que γ_2 también representa una cantidad positiva.

Tomemos luego los términos de la serie (1) que siguen a los ya considerados, y en número suficiente para poder escribir:

$$A_3 = \gamma_2 + \gamma_3,$$

siendo γ_3 mayor que cero.

Las primeras n igualdades análogas a las tres recién escritas, sumadas miembro a miembro, nos darán:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \omega + (-1)^{n+1}\gamma_n.$$

En virtud de (3), la sucesión

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_n, \ldots,$$

si hemos tomado siempre, lo que es posible, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ menores respectivamente que los valores absolutos de los últimos términos utilizados en las series (1) y (2), tendrá por límite cero, y entonces:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + \ldots = \omega \qquad (4).$$

Como, en fin, los términos de cada grupo A_r tienen el mismo signo, puede suprimirse la condición representada por la igualdad precedente de que los términos de $\Sigma u'_n$ sean adicionados por grupos. Las sumas parciales de la nueva serie $\Sigma u'_n$ estarán, en efecto, siempre comprendidas entre dos sumas parciales de (4).

Es claro que el mismo procedimiento que acabamos de indicar nos permitiría deducir, por permutación de términos, una serie propia o impropiamente divergente o una serie oscilante, de una serie relativamente convergente dada.

Toda serie plantea un problema: el del cálculo de su suma total. Para que esta suma exista es necesario que la serie sea convergente. Antes de abordar el problema del cálculo de la suma de una serie, conviene pues en general averiguar si la serie es convergente.

No siempre es posible resolver esta cuestión previa.

Daremos algunas reglas de las más generales y aplicables, como complemento de las definiciones y teoremas anteriores. Nos limitaremos a las series de términos positivos; pero los criterios de convergencia que a ellas se refieren pueden llevar a una conclusión afirmativa respecto de una serie semi-convergente, si ellos permiten comprobar la convergencia de la serie constituída por los valores absolutos de los términos de la serie dada.

Criterios de convergencia y de divergencia de Kummer, D' Alembert, Raabe y Gauss

I.—Criterio de *Kummer* para la convergencia:

La serie de términos positivos Σu_n *es convergente siempre*

que sea posible determinar una sucesión de elementos positivos:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

tal que, para todo $n \geqq N$ (siendo N un entero positivo suficientemente grande), se tenga :

$$(1) \qquad \varphi_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} \geqq \alpha,$$

en que α es una constante positiva.

Como los términos u_n son todos positivos, se obtiene, en virtud de (1):

$$\varphi_n \cdot u_n - \varphi_{n+1} \cdot u_{n+1} \geqq u_{n+1} \cdot \alpha$$

$$\varphi_{n+1} \cdot u_{n+1} - \varphi_{n+2} \cdot u_{n+2} \geqq u_{n+2} \cdot \alpha$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\varphi_{n+p-1} \cdot u_{n+p-1} - \varphi_{n+p} \cdot u_{n+p} \geqq u_{n+p} \cdot \alpha$$

y, por adición miembro a miembro:

$$\varphi_n \cdot u_n - \varphi_{n+p} \cdot u_{n+p} \geqq \alpha \, (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}).$$

La sucesión de elementos positivos :

$$\varphi_n \cdot u_n, \varphi_{n+1} \cdot u_{n+1}, \ldots, \varphi_{n+p} \cdot u_{n+p}, \ldots$$

es pues monótona decreciente y por consiguiente fundamental, lo que permite escribir, para $n \geqq N$ y ε' positivo y arbitrariamente pequeño :

$$\varphi_n \cdot u_n - \varphi_{n+p} \cdot u_{n+p} < \varepsilon'.$$

Se obtiene así, llamando $R_{n,p}$ el resto parcial de la serie propuesta, correspondiendo N a un ε' tal que $\varepsilon' < \alpha \,.\, \varepsilon$:

$$R_{n,p} < \frac{\varepsilon'}{\alpha} < \varepsilon.$$

La serie $\Sigma\, u_n$ es pues convergente.

II.—Criterio de Kummer para la divergencia:

La serie de términos positivos $\Sigma\, u_n$ *es divergente siempre que, existiendo una sucesión*

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

de elementos positivos tal que la serie $\Sigma \dfrac{1}{\varphi_n}$ *sea divergente para* $n \geqq N$ *(N entero positivo suficientemente grande), se tenga constantemente*

$$\varphi_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} \leqq 0.$$

Si se hace, para cualquier $n \geqq N$:

$$u_n = \frac{a_n}{\varphi_n},$$

se tendrá (como consecuencia de $\varphi_n \cdot u_n - \varphi_{n+1} \cdot u_{n+1} \leqq 0$):

$$a_n \leqq a_{n+1}.$$

Luego:

$$R_{n,p} \geqq a_n \left(\frac{1}{\varphi_{n+1}} + \frac{1}{\varphi_{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\varphi_{n+p}} \right),$$

y la serie $\Sigma\, u_n$ es divergente.

La condición que exigía Kummer para sus dos proposiciones recién demostradas, a saber que :

$$\lim_{n=\infty} (u_n \cdot \varphi_n) = 0,$$

no sólo es supérflua, puesto que hemos podido prescindir de ella en las demostraciones que acabamos de dar, sino también falsa (en el sentido de que ella conduciría a excluir la aplicación de los criterios de Kummer en ciertos casos en que el carácter de la serie resulta de uno u otro criterio, enunciado con prescindencia de esa condición). Así lo hizo ver el matemático italiano Dini.

Consideremos, por ejemplo, la serie :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}$$

El teorema (I) le es aplicable haciendo

$$\varphi_n = n^2 \frac{n}{n-1},$$

porque

$$\varphi_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} = n^2 \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} - (n+1)^2 \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= (n+1)^2 \cdot \left(\frac{n}{n-1} - \frac{n+1}{n}\right) = (n+1)^2 \cdot \left(\frac{1}{(n-1)\,n}\right) \geqq \alpha,$$

para $\alpha = 1$ y para $n \geqq N$, siendo N un entero cualquiera mayor que 1. Y sin embargo :

$$\lim_{u = \infty} (u_n \cdot \varphi_n) = 1.$$

Si, en cambio, consideramos la serie $\Sigma\, u_n$, en que suponemos u_n constante; haciendo $\varphi_n = n$, la divergencia de la serie resulta de la aplicación del teorema II, puesto que:

$$\varphi_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_{n+1} = \varphi_n - \varphi_{n+1} = -1 < 0;$$

pero el criterio de divergencia no sería aplicable si mantuviéramos la condición

$$\lim_{n = \infty} (u_n \cdot \varphi_n) = 0,$$

desde que, en este caso, el producto $u_n \cdot \varphi_n$, lejos de tender a cero, crece sin límite.

Si en (I) y (II) hacemos $\varphi_n = 1$ para todos los valores de n, resulta la regla de *D' Alembert:*

III.—*La serie de términos positivos* $\Sigma\, u_n$ *converge o diverge según ocurra que, a partir de cierto* n, *sea siempre:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqq 1 + \delta \ (\delta = \text{constante positiva}), \text{ o } \frac{u_n}{u_{n+1}} \leqq 1.$$

Si ninguna de estas condiciones se cumple, la regla no tiene, naturalmente, aplicación.

Sea, por ejemplo:

$$u_n = \frac{1}{n^r} \ (r > 1), \text{ o } u_n = \frac{1}{n}.$$

Para ambas series,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > 1 \text{ y } \lim_{n = \infty} \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right) = 1,$$

siendo la primera serie convergente, como veremos enseguida, y la segunda, divergente.

Puede en estos casos tener aplicación la regla *Raabe*:

Una serie de términos positivos es convergente o divergente según la expresión

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$$

tienda, para $n = \infty$, *hacia un límite superior o hacia un límite inferior a la unidad.*

Esta regla se demuestra aplicando los teoremas I y II y suponiendo $\varphi_n = n$.

Ejemplo:

Sea la serie.

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots$$

La regla de Raabe conduce a estudiar en este caso el límite de

$$n\left(\frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - 1\right) \text{ o } n\left(\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} - 1\right) = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}}.$$

Se trata pues de hallar el límite, para x tendiendo a cero, del quebrado

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

Es fácil demostrar que ese límite es α, y que, por consiguiente, la serie es convergente para $\alpha > 1$.

Criterio de *Gauss*.

Indiquemos finalmente el siguiente criterio debido a Gauss:

IV. — *Si existe para la serie* $\Sigma\, u_n$, *de términos positivos, un desarrollo de la forma:*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p},$$

la serie converge o diverge según

$$a_1 - b_1 > 1 \quad \text{o} \quad a_1 - b_1 < 1.$$

En efecto,

$$\lim_{n=\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = a_1 - b_1.$$

Ejemplo, serie *hipergeométrica* de Gauss:
Sea la serie

$$1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma}\, x + \frac{\alpha(\alpha+1) \,.\, \beta(\beta+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma+1)}\, x^2 + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1).(\alpha+2)..(\alpha+n).\beta(\beta+1)(\beta+2)..(\beta+n)}{1 \,.\, 2..(n+1).\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)..(\gamma+n)}\, x^n \ldots$$

En este caso, considerando solamente la serie de los coeficientes de x:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{n^2 + n(\gamma+1) + \gamma}{n^2 + n(\alpha+\beta) + a \,.\, \beta},$$

y por consiguiente, la serie de los coefecientes será convergente si se tiene

$$\gamma + 1 - (\alpha + \beta) > 1, \quad \text{es decir} \quad \alpha + \beta < \gamma.$$

La serie hipergeométrica será pues en esto caso convergente para

$$|x| \leqq 1.$$

Se ha afirmado erróneamente (y el error se reproduce todavía en obras modernas) que la condición:

$$\lim_{n=\infty} (u_n \cdot n) = 0$$

es necesaria y suficiente para la convergencia de Σu_n.

La condición no es necesaria ni suficiente. Así, la serie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} +$$

$$\frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \ldots,$$

formada tomando $u_n = \frac{1}{n}$ cuando n es un cuadrado perfecto y $u_n = \frac{1}{n^2}$ para los demás valores de n, es evidentemente convergente; y sin embargo

$$\lim_{n=\infty} (u_n \,.\, n)$$

no existe porque $u_n \cdot n$ toma valores tendientes a cero para los términos de la forma $\frac{1}{n^2}$, y valores iguales a 1 para los de la forma $\frac{1}{n}$.

En cambio, la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3\,.\,1} + \frac{1}{4\,.\,1} \right) + \left(\frac{1}{5\,.\,2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{6\,.\,2} + \frac{1}{7\,.\,2} + \frac{1}{8\,.\,2} \right) + \ldots$$

$$+\left(\frac{1}{(2^q+1)\,q}+\frac{1}{(2^q+2)\,q}+\ldots+\frac{1}{2^{q+1}\,.\,q}\right)+\ldots$$

es divergente, porque, a partir de s_3, sus sumas parciales correspondientes a los grupos escritos entre paréntesis, son mayores qne los de la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+$$

$$\ldots\ldots+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\ldots\ldots,$$

evidentemente divergente. Y sin embargo :

$$\lim_{n=\infty}(u_n\,.\,n)=0.$$

El problema teórico de hallar el valor de la suma total de una serie, queda resuelto cuando se ha llegado a demostrar que la serie es convergente o divergente.

En el segundo caso la suma no existe; en el primero, el valor de la suma se puede calcular con tanta exactitud como se quiera, con solo tomar un número suficiente de sus primeros términos, a condición, no obstante, de que pueda evaluarse un límite del error cometido.

Pero la convergencia de una serie puede a veces resultar tan lenta que el problema de calcular directamente su suma con cierta aproximación sea prácticamente imposible. Por ejemplo, es fácil comprobar que la suma de la serie, evidentemente convergente,

$$1-\frac{1}{\log(10+1)}+\frac{1}{\log(10+2)}-\ldots$$

no puede evaluarse con la aproximación de $\frac{1}{100}$ sin sumar un número de términos de orden 10^{100}.

La transformación de la serie propuesta en otra, o en la suma de otras, de convergencia rápida, es entonces indispensable. Mediante el empleo hábil de tales transformaciones se ha logrado obtener con extraordinaria aproximación algunos valores expresados en series; por ejemplo, el cálculo de π con setecientas siete cifras decimales (*Shanks*).

En muchos casos se ha podido establecer la identidad entre la suma buscada y una expresión fácil de calcular. Así, se ha demostrado que, llamando s_p la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}, \quad s_6 = \frac{\pi^6}{945}, \quad etc.$$

En cambio, las expresiones para p impar no se conocen.

Análogamente, llamando σ_p la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{7^p} + \dots,$$

se tiene

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \sigma_3 = \frac{\pi^3}{32}, \quad etc.;$$

pero no se conocen las expresiones para p par.

Operaciones con las series

La teoría de las operaciones con sucesiones fundamentales da inmediatamente la siguiente proposición:

Si las series $\Sigma\, u_n$ y $\Sigma\, v_n$ son convergentes, también lo serán las series

$$\Sigma (u_n + v_n) \text{ y } \Sigma (u_n - v_n),$$

y se tendrá

$$\Sigma (u_n + v_n) = \Sigma u_n + \Sigma v_n \text{ y } \Sigma (u_n - v_n) = \Sigma u_n - \Sigma v_n.$$

En efecto, si se pone para todo n:

$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n,$$

$$W = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_n + v_n),$$

$$W' = (u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + \dots + (u_n - v_n),$$

se tiene para todo n:

$$U_n + V_n = W_n \text{ y } U_n - V_n = W'_n.$$

En cuanto a la multiplicación de series, ella puede efectuarse aplicando el siguiente teorema de *Cauchy*:

Si las dos series Σu_n y Σv_n son absolutamente convergentes y si escribimos, para abreviar:

$$w_n = u_0 . v_n + u_1 . v_{n-1} + u_2 . v_{n-2} + \dots + u_p . v_{n-p} + \dots + u_n . v_0,$$

la serie Σw_n converge, y se tiene:

$$\Sigma u_n . \Sigma v_n = \Sigma w_n.$$

Escribiendo

$$W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n,$$

W_n será la suma de todos los productos posibles $u_p \cdot v_q$ para los cuales $p + q \leqq n$.

Si aplicamos las notaciones del teorema anterior para las sumas parciales de las dos series dadas, el producto $U_n \cdot V_n$ contiene, además de los recién mencionados, otros productos parciales $u_p \cdot v_q$, pero ninguno para el cual sea $p + q > 2\,n$.

Pongamos ahora para todo n:

$$U'_n = |u_0| + |u_1| + \ldots + |u_n|,$$

$$V'_n = |v_0| + |v_1| + \ldots + |v_n|,$$

$$W'_n = w'_0 + w'_1 + \ldots + w'_n,$$

designando por w'_p la suma

$$|u_0| \cdot |v_p| + |u_1| \cdot |v_{p-1}| + \ldots + |u_p| \cdot |v_0|.$$

Se tiene evidentemente:

$$|U_n \cdot V_n - W_n| \leqq U'_n \cdot V'_n - W'_n \leqq U'_n \cdot V'_n - U'_m \cdot V'_m,$$

llamando m al máximo entero contenido en $\frac{n}{2}$.

Pero m y n crecen simultáneamente, de modo que:

$$\lim_{n=\infty} (U'_n \cdot V'_n - U'_m \cdot V'_m) = 0;$$

luego

$$\lim_{n=\infty} W_n = \lim_{n=\infty} (U_n \cdot V_n) = \lim_{n=\infty} U_n \cdot \lim_{n=\infty} V_n.$$

La condición del teorema que acabamos de demostrar, es suficiente pero no necesaria.

Se ha probado, en efecto, que la aplicación del teorema es le-

gítima, aunque ninguna de las series $\Sigma\, u_n$ y $\Sigma\, v_n$ sea absolutamente convergente, con tal que lo sea la serie $\Sigma\, w_n$.

Como ejemplo tomemos la serie

$$\Sigma\, u_n = E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Designando x un número finito cualquiera, podemos siempre determinar un entero positivo $N \geqq |x|$.

Se obtiene entonces, a condición de ser $n \geqq N$:

$$\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} = \frac{n+1}{|x|} \geqq \frac{N+1}{N} = 1 + \frac{1}{N}.$$

La serie $E(x)$ es pues absolutamente convergente para cualquier valor de x

Consideremos las series $E(x)$ y $E(y)$; aplicándoles la regla de multiplicación de Cauchy, hallaríamos para expresión del término general w_n del producto $E(x).\, E(y)$:

$$w_n = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}\, y}{(n-1)!} + \frac{x^{n-2}\, y^2}{(n-2)!\, 2!} + \ldots +$$

$$\frac{x^{n-p}\, y^p}{(n-p)!\, p!} + \ldots + \frac{y^n}{n!},$$

de donde, recordando la fórmula del binomio y la identidad

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{p!} \equiv \frac{n!}{(n-p)!\, p!},$$

resulta:

$$n!\, .\, w_n = (x+y)^n, \quad w_n = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

es decir que

$$E(x)\, .\, E(y) = E(x+y).$$

Ejemplos:

Entre otras muchas propiedades de la serie armónica, merecen, a título de ejemplo, citarse las dos siguientes:

I.—*La serie*

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots,$$

obtenida eligiendo en la serie armónica los términos cuyos denominadores son números primos, es divergente (Euler). [1]

Llamando p_n al enésimo número primo, es evidente que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots=2,$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2},$$

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots\ldots=\frac{5}{4}<1+\frac{1}{3},$$

. . . .

$$1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p_n^2}+\ldots\ldots=\frac{p_n}{p_n-1}<1+\frac{1}{p_{n-1}};$$

de donde:

$$\log_e\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\right)=\log_e 2<1,$$

$$\log_e\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots\right)=\log_e\left(1+\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2},$$

(1) Véase: M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, t. IV, pág. 288.

$$\log_e\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right)<\log_e\left(1+\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{3},$$

$$\begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{matrix}$$

$$\log_e\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p^2_n}+\ldots\right)<\log_e\left(1+\frac{1}{p_{n-1}}\right)<\frac{1}{p_{n-1}};$$

y, sumando miembro a miembro:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{p_{n-1}}>\log_e\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)\ldots\left(1+\frac{1}{p_n}+\frac{1}{p^2_n}+\ldots\right)\right]>\log_e\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{p_n+1}\right).$$

En efecto, el producto contenido dentro del paréntesis cuadrado comprende infinitos sumandos positivos, entre los cuales figuran los primeros términos de la serie armónica, hasta $\dfrac{1}{p_n+1}$ por lo menos.

Luego, las sucesivas sumas parciales de la serie de Euler crecen más allá de todo límite.

II.— Teorema de *Appell* (Journal de Liouville, 9.ª serie, t. VI (1927), pág. 121):

Llamando A_1, A_2, A_3, las sucesivas sumas parciales de la serie armónica, ninguno de los números A_2, A_3, ... es entero ($A_1 = 1$).

Consideremos la suma $A_{p-1}=\dfrac{a}{b}$ (a y b, primos entre sí).

Tenemos

$$A_p = \frac{a}{b} + \frac{1}{p} = \frac{a\,p + b}{b\,p}.$$

Supongamos que p contiene el factor 2 a una potencia inferior o igual a aquella con que figura en b. Es entonces evidente que el dominador de A_p, expresada en fracción irreducible, contendrá el factor 2 a la misma potencia con que entra en b. En cambio, si p contiene el factor 2 elevado a una potencia mayor, será esta potencia de 2 la que permanecerá en el denominador de A_p.

Ahora consideremos las primeras fracciones $A_2 = \frac{3}{2}, A_3 = \frac{11}{6}$. La segunda contiene 2, como la primera, en su denominador. Pero la fracción siguiente, $\frac{11}{6} + \frac{1}{p}$, en que $p = 4$ contiene 2^2, tendrá en su denominador la 2.ª potencia de 2. Lo mismo ocurrirá con A_5, A_6 y A_7; pero A_8 tendrá un denominador divisible por 2^3, y en general, todas las fracciones A_{2^s}, A_{2^s+1} . . . ., $A_{2^{s+1}-1}$ contendrán en su denominador 2^s. Luego finalmente, ninguna de esas fracciones podrá reducirse a un número entero.

LECCION VII

Funciones

Empezaremos por generalizar y metodizar algunos conceptos ya conocidos.

Si una variable real y depende de los elementos de un conjunto real M en tal forma que exista el medio de determinar el valor de y correspondiente a cada elemento del conjunto, se dice que y es una función real de la variable real x del conjunto M.

Esta dependencia se expresa en general por :

$$y = f(x), \quad \text{o} \quad y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

Se llama variable dependiente a y, y variable independiente a x.

Ejemplo 1º :

La función racional entera

$$y = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

en la que los coeficientes A_p son todos independientes de x.

Ejemplo 2º :

La función racional fraccionaria

$$y = \frac{A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \dots + A_{m-1} X + A_m}{B^0 X^n + B_1 X^{n-1} + \dots + B_{n-1} X + B_n},$$

en que el numerador y el denominador son funciones racionales enteras do x.

Ejemplo 3º :

La función irracional en que y se obtiene efectuando sobre x o sobre funciones racionales de x la extracción de raíces, combinando luego por vía de suma, resta, multiplicación o división los resultados, aplicando nuevamente la extracción de raíces, y así continuando un número finito de veces.

Estas funciones, de las que son casos especiales las funciones racionales (enteras o fraccionarias) se llaman *funciones algebraicas*. Las otras funciones se llaman *trascendentes*.

Ejemplo 4º :

Si $f\ (x)$ es una función real de x, la ecuación cúbica en y:

$$y^3 + 3y + f(x) = 0$$

tendrá una sola raíz real, porque el discriminante

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

es mayor que cero. Esta raíz real única es una función real de la variable x.

Las funciones de los ejemplos 1.º, 2.º, y 3.º, cuyos valores se obtienen efectuando sobre la variable independiente ciertas operaciones definidas, se llaman *funciones explícitas*.

La función del ejemplo 4.º que requiere la resolución previa de una ecuación para obtener el valor de y correspondiente a cada valor de x, se llama *función implícita*.

Ejemplo 5º :

$$y = \sqrt{x}.$$

Esta función solo puede ser definida como función real para $x \geqq 0$.

Ejemplo 6º :

La función $\varphi\ (x)$ tal que para $x \geqq 0$. sea :

$$\varphi\ (x) = x^2 + 2;$$

y para $x < 1$

$$\varphi(x) = 5 - x^2.$$

Ejemplo 7º :

$$\psi(x) = n\,x,$$

siendo n un entero positivo tal que :

$$n - 1 < |\,x\,| < n.$$

Esta función no está definida para los valores enteros de x.

Ejemplo 8.º :

$$E(x),$$

definida por la condición :

$$E(x) = n,$$

siendo n un número entero tal que

$$n \leqq x < n + 1.$$

Esta función se llama de *Legendre*, y se lee : *máximo entero eontenido en x*.

Ejemplo 9.º :

La función de *Lejeune-Dirichlet*

$$\Omega(x) = \pm 1,$$

según que x sea racional o irracional.

Ejemplo 10º :

La función de *Kronecker*

$$sgn(x) = \pm 1, \text{ o } 0,$$

según x sea positivo, negativo o nulo.

El símbolo *sgn* se lee *signum*.

Ejemplo 11°:

Las *funciones trigonométricas* son ejemplos de funciones definidas por vía geométrica.

Sin embargo, basándonos en las fórmulas trigonométricas más elementales y en la periodicidad de estas funciones, podríamos obtener sus expresiones analíticas y demostrar que:

$$sen\ x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots.$$

$$cos\ x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

Las funciones de todos los ejemplos precedentes están definidas para todos los valores de x pertenecientes a uno o más intervalos. Hay funciones en que ésto no ocurre. Así, en la teoría de los números, se introducen funciones especiales que sólo están definidas para los valores enteros y positivos de la variable. Estas funciones se llaman *aritmológicas*.

Ejemplo 12°:

La función $T(n)$ indica el número de los divisores del entero positivo n, de modo que si n es primo, $T(n) = 2$.

$T(n)$ puede, sin embargo, como otras funciones aritmológicas expresarse utilizando los símbolos de algunas de las fuuciones definidas en los ejemplos anteriores:

$$T(n) = \sum_{s=1}^{s=n} \left(1 - sgn\ sen^2 \frac{n\pi}{s}\right)$$

Ejemplo 13°:

La función $\lambda(n)$ designa el número de números primos desde 1 hasta n inclusive.

Invocando el teorema de Wilson, puede fácilmente demostrarse que

$$\mathcal{S}(n) = 3 + \sum_{S=5}^{S=n} \frac{\operatorname{Sen} \frac{(S-1)!}{S} \pi}{\operatorname{Sen} \frac{\pi}{S}}$$

fórmula curiosa debida a *Rafael Barret* ([1]).

Ejemplo 14º :

El elemento general de la sucesión

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$$

es función del índice de colocación n y sólo está definido para n nulo, o positivo y entero.

Si consideramos x y y como coordenadas, la curva de ecuación

$$y = f(x)$$

da una representación gráfica de la función, si esta curva puede dibujarse con aproximación suficiente.

La función $\Omega(x)$ no puede representarse gráficamente.

Una función $f(x)$ que para

$$a - \delta < x < a + \delta$$

está definida, se llama creciente o decreciente para $x = a$, según que la diferencia

$$f(a + h) - f(a),$$

en que $|h|$ es un número positivo cualquiera inferior a un nú-

(1) Rafael Barrett (1870? — 1912), literato y filósofo español.

mero positivo suficientemente pequeño σ, *tenga siempre el mismo signo que* h *o siempre el signo contrario al de* h.

Si $f(x)$ es creciente para todos los valores de x contenidos en el intervalo (a, b), o decreciente para los mismos valores, se dice que es *monótona* en dicho intervalo.

Si $f(x)$ no es monótona en un intervalo (a, b), pero este intervalo puede dividirse en un número finito de sub-intervalos en cada uno de los cuales $f(x)$ sea monótona, se dice que $f(x)$ es *parcialmente monótona* en (a, b).

Si $f(x)$ tiene el mismo valor para todos los valores de x comprendidos en el intervalo (a, b), este intervalo se llama dominio de invariabilidad de $f(x)$.

La definición de función implica dos restricciones que conviene destacar :

1.º)

Como debemos dar valores finitos a x para determinar y, esta variable y solo está definida para valores finitos de la variable x.

2.º)

Como y debe estar definida cuando se dá x, solo pueden admitirse valores finitos y determinados de y.

Ejemplo:

La función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

está definida para todos los valores finitos de x con las dos únicas excepciones de

$$x = 1 \text{ y } x = 2.$$

La función $f(x)$ se dice *deslindada* o *acotada* en el intervalo (a, b) cuando es posible determinar un número positivo A tal que, para todo x del intervalo (a, b), incluídos a y b, se tenga :

$$|f(x)| \leqq A.$$

Hemos demostrado que todo conjunto acotado posee un confín superior y un confín inferior. De ello se deduce que:

Si una función $f(x)$ es acotada en el intervalo (a, b), el conjunto formado por todos los correspondientes valores de la función tiene un confín superior C y un confín inferior c.

$C - c$ se llama *oscilación* de la función $f(x)$ en el intervalo (a, b).

Si la función $f(x)$ tiene la oscilación

$$D = C - c$$

en el intervalo (a, b), designando por x_1 y x_2 dos valores cualesquiera de x pertenecientes a ese intervalo, se tendrá:

$$| f(x_1) - f(x_2) | \leqq D.$$

Como complemento de la proposición recién enunciada demostraremos el siguiente teorema llamado: teorema primero de *Weierstrass*:

Si la función $f(x)$, acotada en el intervalo (a, b), incluídos los extremos, tiene en el intervalo los confines C y c; existe en el mismo intervalo, por lo menos un valor x_1 tal que $f(x)$ tenga en el entorno

$$(x_1 - \sigma, x_1 + \sigma),$$

por confín superior C, por pequeño que se tome el número σ; y también por lo menos otro valor x_2 tal que $f(x)$, en el entorno

$$(x_2 - \sigma, x_2 + \sigma),$$

tenga por confín inferior c.

Sea J_0 el intervalo dado y designemos por C_1 y C_2 los confines superiores de $f(x)$ en cada uno de los dos sub-intervalos que resultan de bisecar J_0 y en los cuales se incluyen también sus extremos. Es evidentemente necesario que uno siquiera de estos números sea igual a C. Designemos por J_1 aquel de los interva-

los resultantes de bisecar J_0 para el cual el confín superior de $f(x)$ sea C, o cualquiera de los dos si ambos tuvieran por confín superior C.

Bisequemos, luego J_1, etc.

La sucesión euclidiana de intervalos :

$$J_0, J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$$

gozará de la propiedad de que $f(x)$ tiene en el intervalo J_n (cualquiera que sea n) por confín superior C.

El valor límite, definido por esta sucesión de intervalos, es, por consiguiente, el número x_1. De un modo completamente análogo demostraríamos la existencia de x_2.

Es claro que puede ocurrir que haya varios números en las condiciones de x_1 y de x_2.

Si $f(x)$ es monótona en el intervalo (a, b), con los valores extremos de este intervalo coinciden x_1 y x_2.

Haremos notar que, en general, no existe un número α tal que :

$$a \leqq \alpha \leqq b$$

y

$$f(\alpha) = C \quad \text{o} \quad f(\alpha) = c.$$

Funciones continuas y discontinuas

Sea a un valor numérico perteneciente al intervalo (α, β).

Supongamos una función $f(x)$, definida para todos los valores de x comprendidos en el intervalo, y consideremos una sucesión fundamental arbitraria,

$$(1) \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

de valor límite a y cuyos elementos estén todos en (α, β).

Si la sucesión

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n), \ldots$$

es siempre fundamental, cualquiera que sea (dentro de las condiciones recién expresadas) la sucesión (1) correspondiente, el límite de esta sucesión de funciones es siempre el mismo.

En efecto: elijamos otra sucesión fundamental

$$(2) \qquad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

que satisfaga las condiciones impuestas para la (1); la sucesión

$$f(\beta_0)\ f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n), \ldots$$

es, por hipótesis, fundamental.

La sucesión

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_n, \beta_u, \ldots,$$

formada por los elementos de las (1) y (2), tendrá por límite a.

Por consiguiente, la correspondiente sucesión de los valores de la función, es decir, la sucesión

$$f(\alpha_0), f(\beta_0), f(\alpha_1), f(\beta_1), \ldots, f(\alpha_n), f(\beta_n), \ldots$$

será igualmente fundamental.

Luego, para $n \geqq N$:

$$| f(\alpha_n) - f(\beta_n) | < \varepsilon,$$

de donde se deduce que las sucesiones fundamentales

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n), \ldots$$

y

$$f(\beta_0), f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n), \ldots$$

tienen el mismo límite.

Designemos con

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

una sucesión cualquiera de límite a, y admitamos además que la sucesión

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n), \ldots$$

es siempre fundamental.

Podemos considerar los dos casos siguientes:

1.º)

Si todos los elemontos de la sucesión

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

satisfacen a la condición

$$\alpha_n < a;$$

si además esta sucesión es arbitraria dentro de las únicas condiciones de ser $\alpha_n < a$ y de tener por límite a; y si, en fin, la sucesión

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), \ldots, f(\alpha_n), \ldots$$

tiene límite, se escribe:

$$f(a-0) = \lim_{n=\infty} f(\alpha_n)$$

2.º)

Si los elementos de la sucesión de límite a

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

satisfacen a la condición

$$\alpha_n > a$$

siendo, por lo demás, arbitrarios; y si entonces la sucesión

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots . f(\alpha_n), \ldots .$$

posee un límite, se escribe :

$$f(a+0) = \lim_{n=\infty} f(a_n).$$

Las notaciones $f(a-0)$, $f(a+0)$ se deben a Lejeune-Dirichlet.

Si $f(a-0)$ y $f(a+0)$ existen ambos pero no son iguales, o, si siendo iguales, su valor común no coincide con el valor que resulta para $f(a)$ de la definición de $f(x)$, se dice que $f(x)$ tiene, para $x=a$, una *discontinuidad de 1.ª especie: regular,* si

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} = f(a),$$

e *irregular*, si

$$\frac{f(a+0)+f(a-0)}{2} \neq f(a).$$

La diferencia $f(a+o)-f(a-o)$ se llama *salto de la función,* para $x=a$.

Ejemplo:

La función

$$\psi(x) = n\,x,$$

en que n designa un entero no negativo tal que

$$n < |x| < n+1,$$

presenta para todo valor entero y positivo n de x un salto igual a

$$\psi(x+o) - \psi(x-o) = n^2 - (n-1)\,n = n.$$

Si no existiera alguno de los límites

$$f(a+o) \quad \text{o} \quad f(a-o),$$

o si no existiera ninguno de ellos, se dice que $f(x)$ tiene para $x = a$, una *discontinuidad de 2.ª especie*.

Ejemplo:

La función

$$f(x) = sen\,\frac{1}{x}$$

tiene, para $x = o$, una *discontinuidad de 2.ª especie*, porque no existen ni $f(o+o)$ ni $f(o-o)$.

Supongamos ahora que

$$f(a-o) = f(a+o) = f(a).$$

Diremos entonces, y sólo entonces, que $f(x)$ es *continua* para $x = a$.

Una función $f(x)$ es continua en (a, b), cuando lo es para todos los valores de (a, b).

Las funciones que en un intervalo dado sólo presentan un número finito de discontinuidades se llaman *parcialmente continuas* en ese intervalo. Las que en un cierto intervalo son infinitas veces discontinuas, se llaman: *parcialmente discontinuas* si son continuas para algún valor de un sub-intervalo cualquiera, por pequeño que éste sea; y *totalmente discontinuas*, en el caso contrario.

Se dice que, al tender x de una manera continua por valores crecientes hacia a, la función $f(x)$ tiende al límite A, cuando es posible, dado un valor positivo ε arbitrariamente pequeño, determinar otro valor positivo σ de tal manera que, para

$$a - \sigma \leqq x < a,$$

sea siempre

$$|A - f(x)| < \varepsilon.$$

Se escribe entonces

$$A = \lim_{h = o} f(a - |h|).$$

Es fácil identificar el límite así definido con el límite $f(a - o)$, tal como lo hemos definido antes. Bastará para ello demostrar el siguiente teorema :

Es condición necesaria y suficiente para la existeacia de

$$\lim_{h = o} f(a - |h|) = A$$

que, dada una sucesión cualquiera de límite a :

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

cuyos elementos sean todos menores que a, la sucesión correspondiente de los valores de la función f (x)

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n) \ldots .$$

sea fundamental. Su límite, que hemos llamado f (a — o), es entonces igual a

$$\lim_{h = o} f(a - |h|) = A.$$

En efecto, admitiendo en primer lugar que

$$\lim_{h = o} f(a - |h|)$$

es finito y determinado (igual a A), si se fija el intervalo $(a - \sigma, a)$ de modo que cuando x pertenezca a él se tenga siempre :

$$|A - f(x)| < \varepsilon$$

y se designa con x_N un elemento de la sucesión

(1) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

tal que él y todos los que le siguen pertenezcan a dicho intervalo tendremos, para $n \geqq N$

$$| A - f(x_n) | < \varepsilon,$$

y por ello, la sucesión

(2) $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$

es fundamental con límite igual a A.

La condición es pues necesaria.

Si, en segundo lugar, admitimos que la sucesión (2) es fundamental siempre que la (1) llene las condiciones expresadas, esa sucesión fundamental tendrá siempre el mismo límite $f(a - o)$.

No sería lícito sin embargo concluir ya que:

$$f(a - o) = A.$$

Podría, en efecto, ocurrir que los infinitos números σ correspondientes a las infinitas sucesiones (1) imaginables para cada una de las cuales se verifica la condición

$$| f(a - o) - f(x_{n+p}) | < \varepsilon$$

cuando x_n pertenece al intervalo $(a - \sigma, a)$, tuvieran por límite cero.

Pero esta parte del teorema puede demostrarse fácilmente por el absurdo.

Porque si hacemos la hipótesis de que A no existe o no es igual a $f(a - o)$, podremos determinar un ε tal que, por pequeño que tomemos el intervalo $(a - \sigma, a)$, haya valores de x comprendidos en él, para los cuales

$$| f(a - o) - f(x) | \geqq \varepsilon.$$

Si formamos la sucesión monótona creciente

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots$$

con los valores de x que correspondan a esa condición, en intervalos cada vez más pequeños, obtenidos eliminando de cada uno su parte inferior en que esté contenido el último z considerado, y de modo que la sucesión tenga por límite a, resulta para todo n:

$$| f(a - o) - f(z_n) | \geqq \varepsilon.$$

Luego, la sucesión

$$f(z_0),\ f(z_1),\ f(z_2),\ \ldots,\ f(z_n)\ \ldots$$

no puede tener por límite $f(a - o)$.

Para que tenga pues ese límite, como hemos supuesto, es necesario desechar las hipótesis de que A no exista o de que sea diferente de $f(a - o$, y admitir, al contrario, que

$$f(a - o) = A.$$

El teorema sería igualmente válido y se demostraría analogamente, sustituyendo en su enunciado

$$f(a + o) \text{ y } \lim_{h = o} f(a + |h|)$$

en vez de

$$f(a - o) \text{ y } \lim_{h = o} f(a - |h|)$$

respectivamente.

Cuando existen los dos límites

$$\lim_{h = o} f(a + |h|) \text{ y } \lim_{h = o} f(a - |h|)$$

y son iguales entre sí, se podrá pues escribir:

$$\lim_{x=a} f(x) = f(a-o) = f(a+o).$$

Si además $f(a)$ es igual al valor común de $f(a+o)$ y $f(a-o)$, la función es continua para $x=a$.

Si las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son continuas en (a, b) y tienen los mismos valores para cada elemento de un conjunto A denso en todo ese intervalo, las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ son idénticas en dicho intervalo.

Es fácil, en primer lugar, comprobar la contnuidad de

$$F(x) = f(x) - \varphi(x)$$

en (a, b).

Además, puesto que $F(x)$ es nula para todos los elementos de A, lo será también para todos los elementos de A', porque cada elemento de A' puede considerarse como límite de una sucesión infinita de elementos de A tomados en su entorno.

Luego, para todos estos valores de A', es decir, para todos los valores de (a, b), se tiene:

$$f(x) = \varphi(x).$$

Vamos ahora a demostrar un teorema debido a Cantor, que se llama *teorema de la continuidad uniforme* y que, se aplica a la demostración del teorema fundamental del Cálculo Integral; pero antes enunciaremos y demostraremos un lema.

Hemos visto que si la función $f(x)$ es acotada en el intervalo (a, b), posee un confín superior C y uno inferior c. La diferencia

$$C - c = D$$

se llama oscilación de la función en el intervalo.

Es evidente que, designando con x_1 y x_2 dos valores cualesquiera del intervalo (a, b),

$$| f(x_1) - f(x_2) | \leqq D.$$

Lema. Si suponemos que en el intervalo

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

comprendido en (a, b), se tenga siempre:

$$| f(x) - f(x_0) | < \sigma,$$

en este intervalo

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

la oscilación de la función es menor que 4 σ.

En efecto, se tiene :

$$f(x_1) - f(x_2) \equiv f(x_1) - f(x_0) + f(x_0) - (x_2),$$

de donde

$$(1) \quad | f(x_1) - f(x_2) | \leqq | f(x_1) - f(x_0) | +$$

$$| f(x_2) - f(x_0) | < 2\sigma$$

con sólo suponer que x_1 y x_2 pertenecen a

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Si ahora C y c designan los confines superior e inferior de $f(x)$ en este intervalo, podremos elegir x_1 y x_2 de modo que

$$f(x_1) > C - \sigma \text{ y } f(x_2) < c + \sigma,$$

o

$$C < f(x_1) + \sigma \text{ y } - c < - f(x_2) + \sigma,$$

o, sumando,

$$C - c < f(x_1) - f(x_2) + 2\sigma.$$

Pero, en virtud de (1),

$$f(x_1) - f(x_2) < 2\sigma.$$

Luego :

$$C - c < 4\sigma.$$

Si $f(x)$ es continua en (a, b), designando con ε un número positivo y arbitrariamente pequeño, corresponderá a cada valor de x tomado dentro de dicho intervalo, un confín superior, que será función de x y que designaremos por $\sigma(x)$, de los números positivos σ tales que para ese valor de x, sea siempre

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{si } |h| \leqq \sigma.$$

Si suponemos ahora que x recorre el intervalo (a, b), puede ocurrir que el conjunto de los valores $\sigma(x)$ tenga por confín inferior cero. Pero si este confín no es nulo sino igual a un número $\delta > 0$, $\sigma(x)$ será superior o igual a δ para todos los x comprendidos en (a, b), y la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

será válida para esos valores de x, con sólo tomar $|h| < \sigma$.

Si para todo ε positivo y arbitrariamente pequeño, puede así determinarse un σ positivo, se dice que $f(x)$ es *uniformemente continua* en (a, b).

Gracias al siguiente teorema de Cantor, el concepto de la continuidad uniforme queda reducido al de la continuidad pura y simple dentro del intervalo considerado, a condición, sin embargo, de que la continuidad se mantenga aún para los valores extremos a y b:

Si $f(x)$ es continua en (a, b), incluidos los extremos a y b, existirá para todo ε positivo arbitrariamente pequeño, otro número δ positivo tal que la desigualdad

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$$

sea válida para todo x de (a, b), incluidos sus extremos, siempre que sea $|h| < \delta$.

Consideremos un valor x del intervalo (a, b), o igual a uno

de sus extremos, y designemos con $\sigma(x)$ el confín superior de los números σ tales que, para este valor determinado de x, sea siempre:

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon,$$

cuando se tome $|h| \leqq \sigma$, y, a fin de descartar la posibilidad de valores infinitos, convengamos en no tomar nunca σ mayor que una cierta cantidad finita, $b - a$ por ejemplo.

Llamemos δ el confín inferior de $\sigma(x)$ en (a, b); δ no será nunca negativo, y habrá por lo menos un valor x en el intervalo, valor que representaremos por x_1, tal que $\sigma(x)$, para los valores de x del entorno

$$(x_1 - \tau, x_1 + \tau)$$

en que τ designa un número arbitrariamente pequeño, posea el confín inferior δ (teorema primero de Weierstrass).

Como $f(x)$ es continua para $x = x_1$, existirá un número σ_1 tal que

$$|(x_1 + h) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

estando $x_1 + h$ en el intervalo

$$(x_1 - \sigma_1, x_1 + \sigma_1).$$

Es este mismo intervalo la oscilación de $f(x)$ será, por el lema recién demostrado, menor que

$$4 \frac{1}{4} \varepsilon = \varepsilon.$$

Para todos los x que pertenecen a

$$(x_1 - \frac{1}{2} \sigma_1, x_1 + \frac{1}{2} \sigma_1)$$

se tiene pues

$$| f (x + h) - f (x) | < \varepsilon \text{ siendo } | h | \leqq \frac{\sigma_1}{2},$$

ya que tanto x como $x + h$ pertenecen a

$$(x_1 - \sigma_1 , x_1 + \sigma_1),$$

incluidos los extremos.

Para estos valores de x se tiene por consiguiente,

$$\sigma (x) \geqq \frac{1}{2} \sigma_1 ,$$

y, como el confín inferior δ de las $\sigma (x)$ corresponde precisamente a estos valores de x tomados en

$$(x_1 - \frac{1}{2} \sigma_1 ; x_1 + \frac{1}{2} \sigma_1),$$

resulta

$$\delta \geqq \frac{1}{2} \sigma_1 .$$

El confín inferior δ es por lo tanto positivo, y la desigualdad

$$| f (x) + h) - f (x) | < \varepsilon$$

se verifica para todos los x de (a, b), siempre que se tome $| h | \leqq \delta$.

Pero si los extremos a y b no se incluyen, puede ocurrir que δ sea nulo. Ejemplo :

$$f (x) = \frac{1}{x}$$

en el intervalo (o, b), excluyendo cero,

De este teorema de Cantor se deduce inmediatamente la proposición importantísima llamada teorema de la continuidad uniforme.

Si la función $f(x)$ es continua en (a, b), incluidos los extremos a y b, designando con ε un número positivo arbitrariamente pequeño, existe otro número positivo δ tal que en todo sub-intervalo de (a, b), cuya extensión no exceda a δ, la oscilación de $f(x)$ sea inferior a ε.

En efecto: si $\frac{1}{2}\delta$ es el confín inferior de los números $\sigma(x)$ que corresponden a

$$\varepsilon' = \frac{1}{4}\varepsilon,$$

la oscilación de $f(x)$ en un intervalo que no exceda a δ será menor que $4\varepsilon' = \varepsilon$.

Teorema segundo de Weierstrass.

Si la función $f(x)$ es continua, sin ser constante, en (a, b), comprendidos los extremos, poseerá en este intervalo un valor máximo y un valor mínimo

Tenemos que demostrar la existencia en (a, b), de un número x_1 tal que

$$f(x_1) - f(x) \geqq 0, \quad (a \leqq x \leqq b),$$

y la de otro, x_2, también incluído en este intervalo, y tal que

$$f(x_2) - f(x) \leqq 0 \quad (a \leqq x \leqq b).$$

Empecemos por establecer el siguiente lema que también se debe a Weierstrass:

Si $f(x)$ es continua para $x = a$ y si existe un número A tal que, para δ y ε positivos y arbitrariamente pequeños, se pueda hallar siempre en $(a - \delta, a + \delta)$ algún valor de x que satisfaga a la desigualdad

$$|A - f(x)| < \varepsilon,$$

se puede afirmar que $f(a) = A$.

Supongamos, en efecto, que $f(a)$ no es igual a A, y hagamos

$$\varepsilon < \frac{1}{2} \mid A - f(a) \mid .$$

Determínese el número positivo δ tal que, para

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

sea siempre

$$\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon.$$

Necesariamente existirá un valor x_1 de x que satisfaga a la vez a estas dos condiciones:

1.ª)

$$a - \delta < x_1 < a + \delta,$$

de donde

$$\mid f(x_1) - f(a) \mid < \varepsilon;$$

2.ª)

$$\mid A - f(x_1) \mid < \varepsilon.$$

Pero de las dos desigualdades

$$\mid f(x_1) - f(a) \mid < \varepsilon \text{ y } \mid A - f(x_1) \mid < \varepsilon,$$

se deduce

$$\mid A - f(a) \mid < 2\varepsilon:$$

desigualdad incompatible con la hipótesis de que

$$\frac{1}{2} \mid A - f(a) \mid > \varepsilon.$$

Luego

$$f(a) = A.$$

Basándonos en el teorema primero de Weierstrass podemos afirmar que en (a, b) existe, por lo menos un valor x_1 de x tal que, por pequeño que determinemos un número σ, la $f(x)$ tenga por confín superior en

$$(x_1 - \sigma, x_1 + \sigma)$$

el mismo número C que es confín superior de $f(x)$ en todo (a, b).

En este entorno existe, pues, por lo menos un valor de x para el cual

$$0 \leqq C - f(x) < \varepsilon$$

(ε arbitrariamente pequeño).

Por consiguiente, la $f(x)$, continua para $x = x_1$, es tal que la diferencia positiva o nula $C - f(x)$ se hace menor que ε para un cierto valor de x comprendido en el entorno

$$(x_1 - \sigma, x + \sigma),$$

por pequeños que sean los números positivos ε.

Luego, según el lema, podemos escribir:

$$f(x_1) = C.$$

Analógamente demostraríamos la existencia de un valor por lo menos, comprendido en (a, b) o igual a uno de sus extremos, para el cual la $f(x)$ pase por un mínimo.

Teorema de *Bolzan:*

Si la función $f(x)$ es continua en (a, b) incluidos los extremos, y si los valores $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ que toma $f(x)$ para dos valores de x pertenecientes al intervalo, son diferentes,

existe por lo menos un valor de x entre α y β para el cual $f(x) = A$, designado por A un número cualquiera comprendido entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$.

Supongamos

$$f(\alpha) < f(\beta),$$

y en consecuencia

$$f(\alpha) < A < f(\beta).$$

Hagamos (α, β) igual a J_0; y determinemos, mediante la bisección reiterada de este intervalo, la sucesión euclidiana

$$J_0, J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$$

en la que, para cualquier n, se elije el sub-intervalo J_n de modo que, llamando α_n y β_n a sus extremos :

$$f(\alpha_n) < A < f(\beta_n.$$

El límite de la sucesión

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

existe y es igual al de la sucesión

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$$

Llamemos ω a ese límite común.

Puesto que por hipótesis la función $f(x)$ es continua en (a, b), lo será para $x = \omega$.

Luego, el límite común de

$$f(\alpha_0), f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n), \ldots$$

y de

$$f(\beta_0), f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n), \ldots$$

que es A, será también el valor de $f(\omega)$.

De la definición que hemos dado de la continuidad de las funciones, resulta inmediatamente que, si se designa por

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

diversas funciones continuas, y por

$$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$$

valores constantes, algunos de los cuales pueden ser nulos, las funciones

$$C_p \cdot f_p(x), \qquad \frac{C_i \cdot f_i(x)}{C_j \cdot f_j(x)},$$

$$\frac{C_1 \cdot f_1(x) + C_2 \cdot f_2(x) + \ldots C_s \cdot f_s(x)}{C_r \cdot f_r(x) + C_{r+1} \cdot f_{r+1}(x) + \ldots + C_t \cdot f_t(x)},$$

serán también funciones continuas, a condición de que los denominadores, si existen, no sean nulos.

LECCION VIII

Series funcionales

Ya hemos visto, al ocuparnos de la función

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

un tipo de serie funcional. En general se llama serie funcional a una serie cuyos términos no tienen valores constantes sino que son funciones de una variable x.

Para cada valor de x que convierte a la serie funcional en una serie numérica convergente, la suma de la serie tendrá un valor numérico determinado. Esa suma,

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

es pues una función de x para todos los valores de esta variable que hacen convergente a la serie.

Si el conjunto de estos valores (conjunto M) tiene sólo un número finito de elementos :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p,$$

se podrá determinar p números naturales

$$N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p,$$

tales que, para $n \geqq N_r$ $(1 \leqq r \leqq p)$, se tenga siempre:

$$| R_n (x_r) | \leqq \varepsilon,$$

en que R_n (x_r) designa el resto de la serie y ε un número positivo previamente dado y arbitrariamente pequeño.

Sea ahora N el mayor de los números

$$N_1, N_2 \; N_3, \ldots, N_p;$$

las p desigualdades

$$| R_n (x_r) | < \varepsilon \quad (1 \leqq r \leqq p),$$

serán válidos para $n \geqq N$, y este número N entero positivo, dependerá de ε pero no de la elección de x_r.

Si el conjunto M es infinito, existe siempre, es cierto, para cada uno de los elementos x, un número entero y positivo N_x tal que sea, para todo $n \geqq N_x$:

$$| R_n (x) | < \varepsilon;$$

pero el máximo del conjunto de los números N_x así definidos, suele entonces ser igual a $+ \infty$. De modo que, en general, no es posible fijar un número N tal que para $n \geqq N$ la desigualdad

$$| R_n (x) | < \varepsilon$$

se verifique, cualquiera que sea el elemento elegido en el conjunto M.

Ejemplo. Para $x \neq 0$, se tiene:

$$1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{|x|}{(p.|x|+1)[(p+1)|x|+1]}$$

En efecto, si designamos por $S_n(x)$ la suma de los n primeros términos de esta serie, se obtiene :

$$S_n(x) = 1 - \frac{1}{n|x| + 1},$$

como inmediata consecuencia de la identidad

$$\frac{|x|}{(p|x| + 1)[(p+1)|x| + 1]} \equiv \frac{1}{p|x| + 1} - \frac{1}{(p+1)|x| + 1}.$$

Por consiguiente,

$$S - S_n(x) = \frac{1}{n|x| + 1} < \varepsilon, \text{ si } n|x| + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\text{es decir, si } n > \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Llamemos N_x el menor número entero que satisfaga la desigualdad :

$$N_x > \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Para valores de x diferentes de cero, pero tan próximos a cero como se quiera, el conjunto constituído por los números N_x para ε dado, tendrá por máximo $+\infty$.

Pero, si se supone

$$|x| \geqq g > 0,$$

el máximo de N_x será el menor de los números enteros y positivos N para los cuales

$$N > \frac{1}{g} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon},$$

y entonces:

$$| R_n(x) | < \varepsilon$$

para todo $x \geqq g > 0$, con tal que $n \geqq N$.

Observemos todavía que la fórmula

$$1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{|x|}{(p \cdot |x| + 1)[(p+1)|x| + 1]}$$

deja de ser válida para $x = 0$, pues,

$$S_n(0) = 0$$

cualquiera que sea n; de donde:

$$S(0) = 0.$$

Una serie de funciones de x se llama *uniformemente convergente o equiconvergente* para el conjunto infinito M (que generalmente es un intervalo) cuando, dado ε positivo y arbitrariamente pequeño, puede determinarse el número natural N de modo que la desigualdad

$$| R_n(x) | < \varepsilon$$

sea verdadera para todo valor de x tomado entre los elementos de M, con sólo suponer $n \geqq N$, siendo N un número dependiente de ε pero no de x.

Podemos ahora demostrar el teorema fundamental de las series funcionales:

Si una serie infinita de funciones es equiconvergente en el intervalo (a, b) y si las funciones que constituyen sus términos son continuas en el mismo intervalo, la suma de la serie es también una fuución continua para todo valor de x tomado dentro del mismo intervalo.

Designemos, en efecto, con $S_n(x)$ una suma parcial y con $R_n(x)$ el resto correspondiente ; se tiene entonces :

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Si suponemos después que x y $x + h$ pertenecen ambos al intervalo (a, b), podremos siempre hallar un número entero y positivo N tal que, para todo $n \geqq N$ y para todo x comprendido dentro del intervalo (a, b), sea :

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |R_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

dando a ε el sentido acostumbrado.

Como N es finito, la suma parcial

$$S_N(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots + u_N(x),$$

cuyos sumandos son todos por hipótesis funciones continuas, será ella misma una función continua en el intervalo (a, b), es decir que siendo σ un número positivo convenientemente elegido, tendremos para $|h| \leqq \sigma$

$$|S_N(x+h) - S_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

pero, en virtud de la identidad

$$S(x+h) - S(x) \equiv S_N(x+h) - S_N(x) + R_N(x+h) - R_N(x),$$

si suponemos satisfechas las desigualdades anteriores, resulta :

$$|S(x+h) - S(x)| < \varepsilon.$$

Luego, la suma de la serie es una función $S(x)$ continua dentro del intervalo (a, b).

Observación : La condición anterior es suficiente, pero no necesaria. Así, por ejemplo, la serie indicada por Cantor

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{n.x}{1+n^2.x^2}-\frac{(n+1).x}{1+(n+1)^2.x^2}\right]$$

tiene evidentemente por suma la función continua para todo x

$$\frac{x}{1+x^2},$$

y sin embargo la serie no es equiconvergente en el intervalo (o, b), por cuanto el resto, igual a

$$\frac{n.x}{1+n^2.x^2},$$

toma el valor $\frac{1}{2}$ para $x=\frac{1}{n}$, por grande que sea n.

Como dato histórico interesante, recordaremos que Cauchy afirmó equivocadamente que la suma $S(x)$ de una serie funcional es una función continua de x en el intervalo (a, b), siempre que en este intervalo la serie sea convergente y las funciones que constituyen sus términos sean continuas.

Abel hizo notar que tal afirmación no podía ser exacta, en general; pero fué el mismo Cauchy quien más tarde puso bien en claro el fundamento de la objeción de Abel.

La serie de que nos hemos ocupado antes

$$1=\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{|x|}{(p.|x|+1)[(p+1)|x|+1]}$$

es convergente en el intervalo (0, 1) incluídos los extremos, y sus términos son funciones continuas de x en el mismo intervalo,

y sin embargo $S(x)$ es discontinua para $x = 0$. Pero la serie no es equiconvergente en el intervalo $(0, 1)$ ni en ningún intervalo que contenga el valor cero.

Función exponencial - Logaritmos naturales

La función

$$E(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

continua para todo x, porque la serie que la define está compuesta de funciones continuas para todo x y es además equiconvergente en cualquier intervalo $(-K, +K)$, se llama *función exponencial*, y fué introducida por Newton en el análisis. Se designa con la letra e el valor de la función exponencial para $x = 1$, es decir que:

$$e = E(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots +$$

$$\frac{1}{n!} + \dots = 2.718281 \dots$$

Es fácil demostrar que e es irracional.

Hermitte demostró, como ya lo hemos dicho antes, que e es un número trascendente. De la fórmula ya conocida

$$E(x) \cdot E(y) = E(x + y)$$

se deduce:

$$E(x) \cdot E(-x) = E(x - x) = E(0) = 1,$$

y

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)}.$$

La función exponencial es pues positiva para todo valor finito y real de x.

También se deduce de la misma fórmula, designando por n un número entero :

$$\Big[E(x) \Big]^n = E(nx),$$

de donde

$$\Big[E(x) \Big]^{\frac{1}{n}} = E\left(\frac{x}{n} \right),$$

$$E(n) = e^n,$$

$$\left[E\left(\frac{1}{n} \right) \right]^n = e$$

es decir :

$$E\left(\frac{1}{n} \right) = \sqrt[n]{e},$$

y, por consiguiente :

$$E\left(\frac{m}{n} \right) = \left(\sqrt[n]{e} \right)^m = e^{\frac{m}{n}}.$$

La igualdad

$$E(x) = e^x$$

queda así demostrada para todo valor racional de x.

Si la potencia es irracional, esa igualdad subsiste, gracias a la definición generalizada, que daremos más adelante, de la elevación a potencias.

Ya hemos visto que $E(x)$, para

$$-K \leqq x \leqq K,$$

siendo K un número positivo arbitrariamente grande, es una función continua y tiene siempre un valor positivo; es además, entre límites cualesquiera monótona creciente, pues

$$E(x + |h|) = E(x) \cdot E(|h|) > E(x)$$

desde que

$$E(|h|) > 1.$$

La función $E(x)$ pasa de un valor positivo tan pequeño a otro tan grande como se quiera, cuando x aumenta de $-\infty$ a $+\infty$.

Luego la ecuación

$$E(x) = a \qquad (o < a < \infty)$$

tiene una, y sólo una solución real. Esta solución se llama *logaritmo natural* de a y se designa con $L\,a$.

Tenemos pues :

$$E(L\,a) = a$$

y también

$$L\,[E(a)] = a,$$

puesto que tomando la función E de los dos miembros se obtiene la identidad

$$E(a) \equiv E(a).$$

Es fácil también comprobar que $L\,e = 1$.

De

$$E(x) = a, \qquad E(y) = b,$$

se saca, dividiendo miembro a miembro,

$$E(x - y) = \frac{a}{b}.$$

Por consiguiente, si $a < b$, $x < y$. La función logarítmica es pues monótona creciente, pasando su valor desde $-\infty$ hasta $+\infty$ para valores positivos crecientes de la variable.

Fácil nos será demostrar que la función logarítmica es continua. Basta, en efecto, escribir (designando ε un número positivo dado tan pequeño como se quiera) :

$$E(x) = Z \text{ y } E(x + \varepsilon) = Z + \sigma,$$

siendo σ positivo, para que se tenga :

$$L(Z + \sigma) - L\,Z = x + \varepsilon - x = \varepsilon,$$

y por consiguiente :

$$|\,L(Z + |h|) - L\,Z\,| < \varepsilon,$$

para todo h tal que $|\,h\,| < \sigma$, puesto que L es monótona creciente.

Podemos, en resumen, afirmar que para

$$o < g < x < G < \infty,$$

el logaritmo de x es una función continua y monótona creciente.

De

$$E(u)\,.\,E(v) = E(u + v),$$

haciendo

$$E(u) = x \text{ y } E(v) = y,$$

y tomando logaritmos, se deduce :

$$L(x\,.\,y) = L\,x + L\,y;$$

y análogamente

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\,x - L\,y,$$

$$L(x^n) = n\,L\,x,$$

y $$x^n = E(n\,L\,x),$$

siendo, en las dos últimas igualdades, n un entero positivo.

Por analogía con la última fórmula, pondremos como definición de la elevación a potencias en el caso general (exponente racional o irracional) :

$$x^{\omega} = E(\omega L x).$$

Esta definición comprende como caso particular la hipótesis de ω racional ; en efecto,

$$x^{\frac{m}{n}} = E\left(\frac{m}{n} L x\right),$$

porque

$$x^{m} = \left[E\left(\frac{m}{n} L x\right) \right]^{n},$$

ya que, tomando logaritmos de los dos miembros, se llega a la identidad :

$$m L x = n L E\left(\frac{m}{n} L x\right).$$

De dicha definición se deduce también

$$e^{\omega} = E(\omega L e) = E(\omega).$$

De las propiedades antes demostradas de la función logarítmica y de la función exponencial, se saca entonces :

$$L x^{\omega} = \omega L x,$$

$$x^{\omega} x^{\omega'} = x^{\omega + \omega'}$$

y otras fórmulas análogas.

LECCION IX

Cocientes diferenciales

Se dice que una función $f(x)$ es diferenciable para $x = a$, cuando el quebrado

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

para h tendiendo a o, tiene un límite ; en este caso se escribe

$$\lim_{h=o} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a),$$

y se dá a este límite el nombre de *cociente diferencial de primer orden* o *derivada primera.*

La función derivada $f'(x)$ debe pues, si existe, ser finita y determinada, o infinitamente grande con signo dado.

Ejemplo :

Para

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{y} \quad \varphi(x) = x^{\frac{2}{3}},$$

y para $x = o$, se tiene

$$\frac{f(h)-f(o)}{h} = h^{-\frac{2}{3}}, \quad \frac{\varphi(h)-\varphi(o)}{h} = h^{-\frac{1}{3}}.$$

La primera función es pues diferenciable para $x = 0$, pero no la segunda.

El cociente diferencial de

$$y = f(x),$$

se designa de los cuatro modos siguientes :

$$\frac{dy}{dx}, \; \dot{y}, \; D_x f(x), \; \text{y} \; f'(x).$$

(Notaciones de Leibnitz, Newton, Lagrange y Cauchy, respectivamente).

Si $f'(x)$ es diferenciable a su vez con relación a x, el cociente diferencial de $f'(x)$ se llama *cociente diferencial de segundo orden o derivada segunda*, y se designa por

$$\frac{d^2 y}{dx^2}, \; \ddot{y}, \; D_x^2 f(x), \; \text{o} \; f''(x).$$

Análogamente se definen los cocientes diferenciales de orden superior al segundo.

Se dice que la función $f(x)$ es diferenciable en (a, b), cuando lo es para todo x perteneciente a dicho intervalo.

De la definición de cociente diferencial se deduce la siguiente proposición :

Si la función $f(x)$ es diferenciable para $x = a$ y si $f'(x)$ es finita, $f(x)$ es continua para $x = a$.

Tenemos que demostrar que, si se verifican las hipótesis del enunciado, para todo ε positivo y arbitrariamente pequeño :

$$f(a+h) - f(a) < \varepsilon,$$

siempre que $|h|$ se mantenga menor que cierto valor positivo.

En efecto, si hacemos

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \delta,$$

de donde

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right| \leqq |f'(a)| + |\delta|$$

y

$$|f(a+h)-f(a)| \leqq |h| \, [\, |f'(a)| + |\delta| \,];$$

y si llamamos τ un número positivo arbitrario, podremos determinar un número positivo σ tal que para $|h| \leqq \sigma$ sea siempre $|\delta| < \tau$.

Tomando pues $|h| \leqq \sigma$,

$$\frac{\varepsilon}{|f'(a)| + |\delta|} > \frac{\varepsilon}{|f'(a)| + \tau}.$$

Si se toma además

$$|h| < \frac{\varepsilon}{|f'(a)| + \tau},$$

se tendrá, para todo valor de $|h|$ que sea a la vez inferior o igual a σ y a $\dfrac{\varepsilon}{|f'(a)| + \tau}$:

$$|f(a+h)-f(a)| < \varepsilon.$$

Obsérvese que

$$\frac{\varepsilon}{|f'(a)| + \tau}$$

no es nulo, puesto que $f'(a)$ es finito por hipótesis; por consiguiente, dado ε positivo y arbitrariamente pequeño, podremos determinar un valor positivo (el menor de los valores σ y

$$\left.\frac{\varepsilon}{|f'(a)| + \tau}\right),$$

tal que, para $|h|$ menor que él,

$$|f(a+h)-f(a)|<\varepsilon.$$

Luego, $f(x)$ es continua para $x=a$.

Función continua no diferenciable de Weierstrass

La recíproca de la proposición que acabamos de demostrar no es verdadera.

Podemos, en efecto, citar funciones continuas para todo valor de x y que no son derivables para ningún valor de x.

El primer ejemplo de tales funciones se debe a Weierstrass, que demostró el siguiente teorema :

Supongamos $0<b<1$, y designemos con a un entero impar positivo que satisfaga a la desigualdad

$$a\,b>1+\frac{3\pi}{2}.$$

La función definida por la serie

$$W(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos.(a^n \pi x)$$

es uniforme y continua para todo valor real y finito de x, y sin embargo no posee derivada para ninguno de esos valores de x.

Es fácil ver que la serie que define a la función converge uniformemente dentro de cualquier intervalo, pues el resto $R_{n,p}$, cualesquiera que sean n, p y x, satisface a la siguiente igualdad-desigualdad :

$$|R_{n,p}|\leqq b^{n+1}+b^{n+2}+\ldots\ldots+b^{n+p},$$

cuyo segundo miembro tiene por límite para $p=\infty$:

$$\frac{b^{n+1}}{1-b}.$$

Como, además, para $| x | \leqq K$ (por grande que sea el número K) todos los términos de la serie son funciones continuas de x, la suma $W(x)$ será para $|x| \leqq K$ una función continua de x.

Sea ahora m un entero positivo cuyo valor dejaremos provisoriamente indeterminado, y designemos por x_0 un valor cualquiera de x. Podremos siempre hallar un entero α_m que satisfaga la condición

$$a^m . x_0 = \alpha_m + x_m \quad \text{o} \quad x_0 = \frac{\alpha_m + x_m}{a^m},$$

en que x_m es tal que

$$-\frac{1}{2} < x_m \leqq \frac{1}{2}.$$

Si después ponemos

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

resultará :

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_m}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_m}{a^m},$$

de donde

$$x' < x_0 < x'',$$

y las diferencias $x' - x_0$ y $x'' - x_0$ serán tan pequeñas como se quiera en valor absoluto con sólo tomar m suficientemente grande.

Sentadas estas premisas, estudiemos los dos cocientes :

$$\frac{W(x') - W(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{x' - x_0} \left[\cos.(a^n \pi x') - \cos.(a^n \pi x_0) \right]$$

y

$$\frac{W(x'') - W(x_0)}{x'' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^n}{x'' - x_0} \left[\cos.(a^n \pi x'') - \cos.(a^n \pi x_0) \right]$$

empezando por el primero.

Si m representa el entero aludido antes, una sencilla transformación nos permitirá escribir :

$$(1) \quad \frac{W(x') - W(x_0)}{x' - x_0} = \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{(a\,b)^n [\cos.(a^n \pi x') - \cos.(a^n \pi x_0)]}{a^n (x' - x_0)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{n=\infty} b^{m+n} \frac{[\cos.(a^{m+n} \pi x') - \cos.(a^{m+n} \pi x_0)]}{x' - x_0}$$

Con respecto a la primera de las sumaciones del segundo miembro, obsérvase ante todo, que :

$$\frac{\cos (a^n \pi x') - \cos (a^n \pi x_0)}{a^n (x' - x_0)} =$$

$$- \pi \operatorname{sen} \frac{a^n \pi (x' + x_0)}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{a^n \pi (x' - x_0)}{2}}{\frac{a^n \pi (x' - x_0)}{2}} ;$$

pero ninguno de los últimos factores del segundo miembro de esta igualdad es mayor que la unidad en valor absoluto ; luego, podemos afirmar que el valor absoluto de la primera sumación del segundo miembro de (1) no es mayor que

$$\pi \left[1 + a\,b + (a\,b)^2 + \ldots + (a\,b)^{m-1} \right] < \frac{\pi (a\,b)^m}{a\,b - 1}$$

y, por consiguiente, poniendo: $-1 < \varepsilon < 1$, e introduciendo el factor $(-1)^{\alpha_m}$ para hacer comparable la expresión a que vamos a llegar enseguida con la que corresponde a

$$\frac{W(x'') + W(x_0)}{x'' - x_0},$$

podremos escribir

$$\sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{(ab)^n \left[\cos.(a^n \pi x') - \cos.(a^n \pi x_0)\right]}{a^n (x' - x_0)} = \frac{\pi (ab)^m (-1)^{\alpha_m} \varepsilon}{ab-1}$$

Ahora, para la segunda sumación del segundo miembro de (1), recordando que a es un número impar y teniendo presentes las igualdades:

$$a^m x' = \alpha_m - 1, \quad a^m x_0 = \alpha_m + x_m,$$

$$\cos(a^{m+n} \pi x') = \cos[a^n(\alpha_m - 1)\pi] = -(-1)^{\alpha_m},$$

$$\cos(a^{m+n} \pi x_0) =$$

$$\cos(a^n \alpha_m \pi + a^n \pi x_m) = (-1)^{\alpha_m} \cos(a^n \pi x_m),$$

y, finalmente,

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_m}{a^m},$$

obtendremos:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{m+n}}{x'-x_0} \left[\cos.(a^{m+n} \pi x') - \cos.(a^{m+n} \pi x_0)\right] =$$

$$(-1)^{\alpha_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \frac{1 + \cos.(a^n \pi x_m)}{1 + x_m}$$

Pero los sumandos del segundo miembro son positivos o nulos, prescindiendo del factor $(-1)^{\alpha_m} (a\,b)$; y como $|\,x_m\,| \leqq \frac{1}{2}$, $\cos \pi\, x_m$ no puede ser negativo, y por consiguiente, el primero de dichos sumandos nunca puede ser menor que $\frac{2}{3}$ (y si es igual a $\frac{2}{3}$ los demás sumandos son positivos).

Luego:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b^{m+n}}{x'-x_0} \left[\cos.(a^{m+n}\pi x') - \cos.(a^{m+n}\pi x_0)\right] = (-1)^{\alpha_m} (a b)^m \cdot \frac{2\eta}{3}$$

(siendo $\eta > 1$); luego en fin:

$$(2) \quad \frac{W(x') - W(x_0)}{x' - x_0} = (-1)^{\alpha_m} \cdot (a\,b)^m \cdot \left(\frac{2\,\eta}{3} + \frac{\pi\,\varepsilon}{a\,b - 1}\right).$$

Análogamente demostraríamos que

$$(3) \quad \frac{W(x'') - W(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha_m} (a b)^m \left(\frac{2\,\eta'}{3} + \frac{\pi\,\varepsilon'}{a\,b - 1}\right);$$

en que $\eta' > 1$ y $-1 < \varepsilon' < 1$.

Recordemos ahora que

$$a\,b - 1 = \frac{3\,\pi}{2\,r},$$

en que $r < 1$ e independiente de m, y llegaremos al siguiente resultado:

$$\frac{2\,\eta}{3} + \frac{\pi\,\varepsilon}{a\,b - 1} > \frac{2}{3} - \frac{\pi}{\frac{3\pi}{2r}} = \frac{2}{3}(1 - r) = P > 0,$$

llamando P un número positivo independiente de m; y también al resultado análogo:

$$\frac{2\eta'}{3} + \frac{\pi\varepsilon'}{ab-1} > P' > 0.$$

Pero las fórmulas (2) y (3) son válidas para todo valor de m por grande que sea. Ahora bien, aumentando m, las diferencias $x_0 - x'$ y $x'' - x_0$ se hacen tan pequeñas como se quiera, en tanto que $(ab)^m$ crece más allá de todo límite; luego el quebrado

$$\frac{W(x_0+h) - W(x_0)}{h},$$

a medida que $|h|$ disminuye según la ley que resulta de ir dando a m valores crecientes, aumenta sin límite en valor absoluto pero tomando signos contrarios para valores de h afectados de signos contrarios.

Luego, $W(x)$ no tiene derivada para el valor cualquiera x_0 de x.

Indice de nombres propios

INDICE DE MATERIAS

ERRATAS

Páginas	Renglón	Dice	Debe decir
12	8	$\leqq$	$\geqq$
27	último	anotación	notación
47	5	,	$+ \ldots\ldots,$
49	18	$R_n \leqq$	$R_n <$
61	18	$n = 1$	$p = 1$
68	22	β_n	$-\beta_n$
72	9	*divergente*	*divergente;*
75	3	regla	regla de
85	5	dominador	denominador
91	4	*Barret*	*Barrett*
97	último	x	n
104	16	σ	δ
id	18	σ	δ
109	18	ε	ε y σ
id	24	*Bolzan*	*Bolzano*
119	16	Hermitte	Hermite